

Mehrzieloptimierung durch evolutionäre Algorithmen

Stephan Blum^{1*}; Jörg Riedel¹

¹ DYNARDO – Dynamic Software and Engineering GmbH, Weimar

Zusammenfassung

Die meisten praktischen Optimierungsprobleme beinhalten mehr als nur eine Zielfunktion und eine Vielzahl von Designvariablen. Die gleichzeitige Berücksichtigung aller Zielfunktionen führt zu einer Menge Pareto-optimaler Lösungen für das Optimierungsproblem. Es existieren zahlreiche Methoden zur Mehrzieloptimierung, von denen die evolutionären Algorithmen in den letzten 15 Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen haben.

Dieser Artikel erläutert zunächst die theoretischen Grundlagen der Mehrzieloptimierung sowie die Terminologie der Pareto-Dominanz und stellt ein Verfahren zur Mehrzieloptimierung basierend auf einem evolutionären Algorithmus vor. Anhand verschiedener Testprobleme wird das Konvergenzverhalten des Verfahrens untersucht und dessen Anwendbarkeit auf praktische Optimierungsaufgaben nachgewiesen.

Keywords: Mehrzieloptimierung, Pareto, Dominanz-Kriterium, Evolutionärer Algorithmus, Genetik

*Kontakt: Stephan Blum, DYNARDO – Dynamic Software and Engineering GmbH, Luthergasse 1d, D-99423 Weimar, E-Mail: stephan.blum@dynardo.de

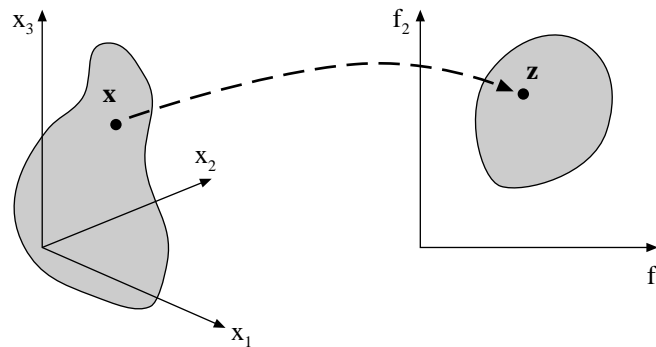


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Designvariablenraum (links) und Zielfunktionsraum (rechts).

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Formulierung des Mehrzieloptimierungsproblems

Ein Mehrzieloptimierungsproblem zeichnet sich durch das Vorhandensein einer Anzahl verschiedener Zielfunktionen aus, die es entweder zu minimieren oder zu maximieren gilt. Zusätzlich können Nebenbedingungen formuliert werden, die von jeder möglichen Lösung erfüllt werden müssen. Ein Mehrzieloptimierungsproblem kann in seiner allgemeinen Form wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize/maximize: } f_m(\mathbf{x}), && m = 1, \dots, M; \\
 &\text{subject to: } g_j(\mathbf{x}) \geq 0, && j = 1, \dots, J; \\
 &h_k(\mathbf{x}) = 0, && k = 1, \dots, K; \\
 &x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, && i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei ist $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ der Vektor der Designvariablen. Er enthält die n Entscheidungsgrößen, die eine Lösung beschreiben. Die Variablen können kontinuierlich, diskret oder binär formuliert werden und sind jeweils durch eine untere und eine obere Schranke begrenzt. Als Nebenbedingungen werden sowohl Bedingungen der Ungleichheit $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ als auch Bedingungen der Gleichheit $h_k(\mathbf{x}) = 0$ berücksichtigt. Nebenbedingungen spiegeln oft begrenzte Ressourcen, Benutzeranforderungen oder Grenzen für die Gültigkeit des Berechnungsmodells bezüglich des Optimierungsproblems wider. Die Lösungen, die sowohl die Nebenbedingungen als auch die Variablengrenzen erfüllen, bilden zusammen den gültigen n -dimensionalen Designvariablenraum X_f :

$$X_f := \{\mathbf{x} \in X : g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \wedge h_k(\mathbf{x}) = 0\}. \tag{2}$$

Jeder Lösung \mathbf{x} wird über die Auswertung der M Zielfunktionen ein Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))^T$ zugeordnet, der einen Punkt im M -dimensionalen Zielfunktionsraum beschreibt. Dies bildet den entscheidenden Unterschied zum Einzieloptimierungsproblem, bei dem nur eine Zielfunktion existiert. Der Zusammenhang zwischen Designvariablenraum und Zielfunktionsraum soll durch Abb. (1) verdeutlicht werden.

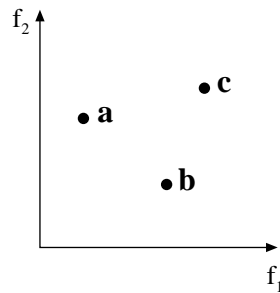


Abbildung 2: Das Prinzip der Pareto-Dominanz für ein Minimierungsproblem mit zwei Zielfunktionen: Lösung **a** dominiert Lösung **c**, da **a** in beiden Kriterien überlegen ist. Lösung **a** ist indifferent bezüglich **b**, da jede Lösung in jeweils einem Kriterium der anderen überlegen ist.

Das Ziel des Optimierungsprozesses ist es schließlich, Vektoren aus dem Designvariablenraum zu finden, die die Randbedingungen erfüllen und für deren Parameter die Zielfunktionen optimale Werte annehmen.

1.2 Prinzip der Pareto-Dominanz

Das nach dem italienischen Ökonomen Vilfredo Pareto (1848–1923) benannte Kriterium der Pareto-Dominanz dient zur paarweisen Bewertung von Lösungen unter gleichzeitiger Berücksichtigung verschiedener Zielfunktionen. Per Definition dominiert eine Lösung $\mathbf{a} \in X$ eine Lösung $\mathbf{b} \in X$ dann und nur dann, wenn sie in allen Zielfunktionen überlegen oder gleich ist und in mindestens einer Zielfunktion überlegen ist. Dieser Zusammenhang wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\mathbf{a} \succ \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i(\mathbf{a}) \leq f_i(\mathbf{b}) \\ &\wedge \exists j \in \{1, \dots, m\} : f_j(\mathbf{a}) < f_j(\mathbf{b}) \end{aligned} \quad (3)$$

Dominiert keine der beiden Lösungen die jeweils andere, bezeichnet man deren Relation als indifferent (s. Abb. (2)). Durch Anwendung des Kriteriums der Pareto-Dominanz läßt sich unter verschiedenen Entscheidungsvektoren eine partielle Ordnung herstellen. Pareto-optimal ist eine Lösung dann, wenn es keinen Entscheidungsvektor gibt, der für ein Zielkriterium eine Verbesserung darstellen würde, ohne gleichzeitig mindestens ein anderes zu verschlechtern. Anders ausgedrückt ist eine Lösung dann Pareto-optimal, wenn sie von keiner anderen Lösung dominiert wird. Für eine nicht dominierte Lösung $\mathbf{x} \in X_f$ in Bezug auf eine Menge $A \subseteq X_f$ gilt:

$$\nexists \mathbf{a} \in A : \mathbf{a} \succ \mathbf{x} \quad (4)$$

Sind alle Zielfunktionen gleichrangig und wird a priori keine Wichtung der Optimierungskriterien vorgenommen, enthält die nicht dominierte Teilmenge aus den möglichen Lösungen X_f die besten Lösungen für das Mehrzieloptimierungsproblem. Diese Lösungen

werden auch als Pareto-Set bezeichnet. Die korrespondierenden Punkte im Zielfunktionsraum bilden die Pareto-Front. Ist das Verhältnis der Zielfunktionen konkurrierend, besteht das Pareto-Set aus einer Menge Pareto-optimaler Lösungen, die jeweils einen Kompromiß zwischen den Zielfunktionen repräsentieren. Für ein Verfahren zur Mehrzieloptimierung ergeben sich demnach die Forderungen nach Konvergenz und Diversität der Lösungsfront. Es sollen mehrere Lösungen nahe den Pareto-optimalen Lösungen gefunden werden, die verschieden genug sind, um die gesamte Ausbreitung der Pareto-Front zu repräsentieren.

Obwohl die Mehrzieloptimierung viele optimale Lösungen hervorbringt, ist der Anwender wie auch bei der Einzieloptimierung meist nur an einer Lösung interessiert. Da die Pareto-Front verschiedene Kompromißlösungen enthält, stellt sich für den Optimierer die Frage, welche der Lösungen zu wählen ist. Um die Entscheidung für eine Lösung zu ermöglichen, müssen a posteriori Präferenzen definiert werden. Dies erfordert der Problemstellung übergeordnete Informationen, die oft nicht technischer Natur und erfahrungsbasiert sind. Eine Entscheidungsfindung anhand einer Pareto-Front erfordert zwar ein hohes Maß an Problemkenntnis, das Wissen um den Zusammenhang der Zielfunktionen für Pareto-optimale Kompromißlösungen ermöglicht es jedoch auch, eine den eigenen Anforderungen entsprechende Lösung auszuwählen.

2 Evolutionäre Mehrzieloptimierung

2.1 Einführung

Evolutionäre Algorithmen (EA) sind stochastische Suchverfahren, die nach dem Vorbild der biologischen Evolution Prinzipien der Anpassung, Selektion und Variation verwenden. In einem EA durchsucht eine Population künstlicher Individuen den Variablenraum. Ziel ist es, schrittweise bessere Lösungen zu finden und auf diese Weise Optima zu bestimmen oder zu approximieren. Jedes Individuum repräsentiert hierbei eine mögliche Lösung des Optimierungsproblems.

Die Verwendung von EA zur Lösung von Mehrzieloptimierungsproblemen hat sich heute sowohl als Forschungsgebiet als auch in der Praxis etabliert. Der Vorteil liegt in der parallelen Suche nach mehreren Pareto-optimalen Lösungen in einem einzigen Simulationslauf. Zahlreiche wissenschaftliche Publikationen und unterschiedliche Implementierungen verdeutlichen die Bemühungen, aber auch den Bedarf nach einem stabilen, anwendbaren Algorithmus. Ein Überblick über die Vielzahl von Veröffentlichungen wurde von [Coello \(2004\)](#) im Internet zusammengestellt.

2.2 Ablauf des Algorithmus

Der für die Anwendung in OptiSLang implementierte Algorithmus basiert weitgehend auf dem Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA2), der u.a. in [Zitzler u. a. \(2001\)](#) detailliert beschrieben wird. SPEA2 verbindet verschiedene aktuelle Bewertungs- und Selektionmethoden zu einem leistungsfähigen Mehrzieloptimierungsverfahren, welches den Forderungen nach Konvergenz und Diversität der Lösungen gerecht wird. Dabei benötigt der Algorithmus eine minimale Anzahl von Steuerungsparametern, was ihn zum Einsatz

für multidisziplinäre Aufgabenstellungen prädestiniert. Die folgenden Schritte beschreiben den grundlegenden Ablauf des Algorithmus.

SPEA2 Main Loop

Input: α Archivgröße
 μ Anzahl der Eltern = Anzahl der Nachkommen
 T maximale Anzahl der Generationen
Output: A nicht dominierte Lösungsmenge

- Schritt 1: **Initialisierung:** Erzeuge eine zufällig initialisierte Population P_0 der Größe α und ein leeres externes Archiv $\bar{P}_0 = \emptyset$. Setze den Generationszähler $t = 0$.
- Schritt 2: **Fitneßzuweisung:** Ermittle die Fitneßwerte aller Individuen in P_t und \bar{P}_t .
- Schritt 3: **umgebungsbedingte Selektion:** Kopiere alle nicht dominierten Individuen aus P_t und \bar{P}_t nach \bar{P}_{t+1} . Übersteigt die Größe von \bar{P}_{t+1} den Wert α , reduziere \bar{P}_{t+1} mittels des Abschneideoperators. Ist die Größe von \bar{P}_{t+1} kleiner als α , fülle \bar{P}_{t+1} mit dominierten Individuen aus P_t und \bar{P}_t auf.
- Schritt 4: **Abbruch:** Wenn $t \geq T$ oder ein anderes Abbruchkriterium erfüllt ist, bilden die nicht dominierten Lösungen in \bar{P}_{t+1} die nicht dominierte Lösungsmenge A .
- Schritt 5: **Elternselektion:** Wähle aus \bar{P}_{t+1} Individuen zur Reproduktion durch binäre Turniererselektion mit Zurücklegen aus.
- Schritt 6: **Variation:** Wende Rekombinations- und Mutationsoperatoren auf die Elternpopulation an. P_{t+1} ergibt sich aus der daraus resultierenden Population. Erhöhe den Generationszähler ($t = t + 1$) und gehe zu Schritt 2.

Der Algorithmus verwendet das Prinzip des Elitismus in Form eines Archivs festgelegter Größe, in dem jeweils die besten Individuen der vorhergehenden Generation enthalten sind. Es bildet gleichzeitig die Lösungsmenge, aus der eine bestimmte Anzahl an Individuen zur Reproduktion selektiert werden. Die Lösungen des Archivs überleben den Generationssprung, ohne durch Variationsoperatoren verändert zu werden. Dadurch wird verhindert, daß nichtdominierte Lösungen durch zufällige Einflüsse verlorengehen.

2.3 Dominanzbasierte Fitneßzuweisung

Die Bewertung der Individuen im Kontext multipler Kriterien und somit die Zuweisung skalarer Fitneßwerte erfolgt durch die Anwendung dominanzbasierter Rangbildung. Im Gegensatz zur Einzieloptimierung, bei der jede Lösung unabhängig bewertet werden kann, erfordert das jedoch die gleichzeitige Betrachtung aller Individuen der Population. Daraus resultiert die Eigenschaft, daß Fitneßwerte ihre Gültigkeit verlieren, sobald ein Individuum der Population verändert wird.

Das verwendete Verfahren zur Fitneßzuweisung besteht aus zwei Schritten. Zunächst wird für jedes Individuum i ein Wert $S(i)$ für dessen *strength* bestimmt, der die Anzahl der Lösungen repräsentiert, die von diesem Individuum dominiert werden.

$$S(i) = \text{card } J \quad (5)$$

$$J := \{j \in P_t \cup \bar{P}_t : i \succ j\}$$

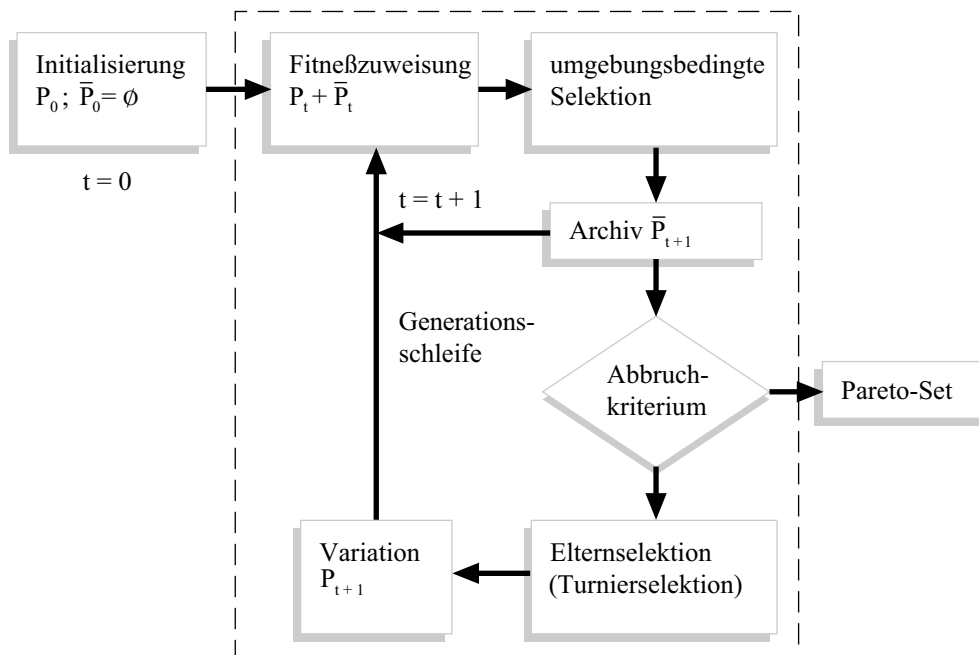


Abbildung 3: Ablaufs des evolutionären Mehrzieloptimierungsalgorithmus.

Die Fitneß (*raw fitness*) $R(i)$ einer Lösung i ergibt sich schließlich aus der Summe der *strength*-Werte der Individuen, von denen i dominiert wird.

$$R(i) = \sum_{j \in J} S(j) \quad (6)$$

$$J := \{j \in P_t \cup \bar{P}_t : j \succ i\}$$

Für nicht dominierte Lösungen ergibt sich eine Fitneß von $R(i) = 0$. Lösungen, die von vielen Individuen dominiert werden, erhalten höhere Werte für die Fitneß. Die Fitneß $R(i)$ ist somit ein Wert, den es zu minimieren gilt. Die beiden Schritte zur Bewertung der Individuen sind in Abb. (4) für ein Minimierungsproblem mit zwei Zielfunktionen dargestellt.

2.4 Dichteabschätzung

Bei der Mehrzieloptimierung geht es nicht nur darum, eine Anzahl Pareto-optimaler Lösungen zu finden. Zusätzlich sollen diese die Pareto-Front auch näherungsweise repräsentieren. Deshalb soll eine Konzentration der Lösungen auf lokale Optima vermieden werden. Dazu existieren verschiedene Strategien zur Gewährleistung der Diversität der Population, um der u.a. durch Selektionsdruck hervorgerufenen Konzentration von Individuen entgegenzuwirken.

Die verwendete Methode erweitert das Selektionskriterium Fitneß um einen Wert zur Dichteabschätzung, der umgekehrt proportional zum Abstand eines Individuums zu seinem k -ten Nachbarn im Zielfunktionsraum ist. Dieser Zusammenhang wird in Silverman (1986) als lokales Verfahren zur Dichteabschätzung von Daten beschrieben. Für eine Lösung i müssen dazu die Abstände zu allen anderen Lösungen ermittelt und in aufstei-

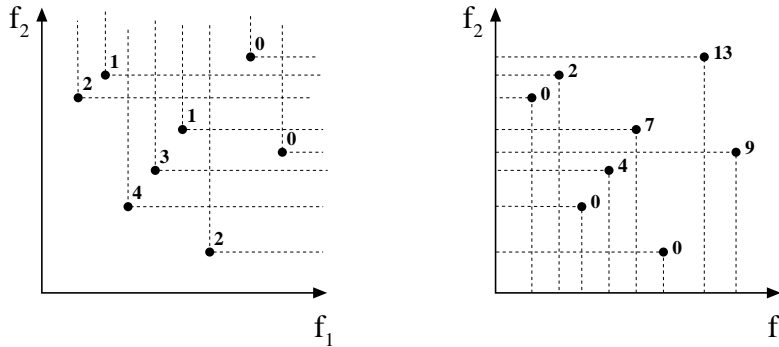


Abbildung 4: SPEA2 Fitneßzuweisung für ein Minimierungsproblem. Ermittlung der strength-Werte (links) und der raw fitness (rechts).

gender Reihenfolge geordnet werden.

$$d_1(i) \leq \dots \leq d_k(i) \leq \dots \leq d_n(i) \quad (7)$$

Hierbei repräsentiert $d_k(i)$ den Abstand von i zu seinem k -ten Nachbarn. Daraus ergibt sich das Maß $D(i)$ für die Dichte einer Lösung i wie folgt:

$$D(i) = \frac{1}{d_k(i) + 2} \quad (8)$$

Die Fitneß einer Lösung ergibt sich schließlich als die Summe aus *raw fitness* und dem Maß der Dichteabschätzung.

$$F(i) = R(i) + D(i) \quad (9)$$

Bei der Anwendung dieses Verfahrens werden Lösungen bevorzugt, die einen großen Abstand zu ihrem k -ten Nachbarn besitzen. Dies erhöht den Selektionsdruck für Randlösungen und dient der Gewährleistung der Diversität der Lösungsfront.

2.5 Berücksichtigung von Nebenbedingungen

Viele praktische Mehrzieloptimierungsprobleme beinhalten lineare oder nichtlineare Nebenbedingungen der Gleichheit oder Ungleichheit. Eine parameterfreie Methode zu deren Berücksichtigung wird in Deb (2000) beschrieben. Sie basiert auf einer entkoppelten Betrachtungsweise von Zielfunktion und Verletzung der Nebenbedingungen. Dies resultiert in einer zusammengesetzten Fitneßfunktion für jede Lösung \mathbf{x} :

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für } g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, J, \\ f_{max} + \sum_{j=1}^J \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle & \text{sonst.} \end{cases} \quad (10)$$

Hierbei ist f_{max} der Zielfunktionswert der schlechtesten gültigen Lösung der Population. Abb. (5) veranschaulicht die Konstruktion der Fitneßfunktion $F(\mathbf{x})$ aus der Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ und der Nebenbedingung $g_j(\mathbf{x})$ für ein Minimierungsproblem mit einer Designvariablen.

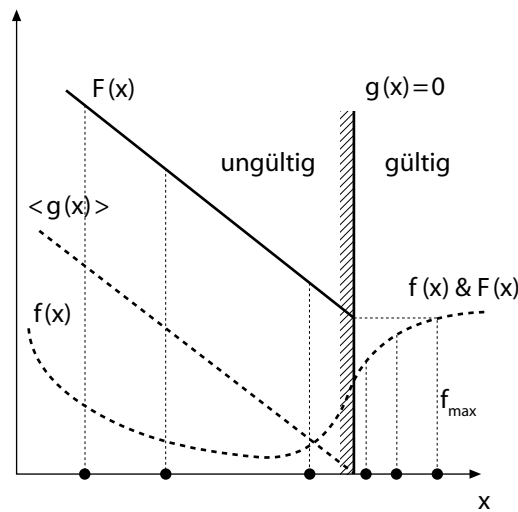


Abbildung 5: Zusammengesetzte Fitneßfunktion bei der Berücksichtigung von Nebenbedingungen.

Die Integration dieser Methode in den evolutionären Algorithmus zur Mehrzieloptimierung erfolgt durch die Erweiterung des Dominanzkriteriums. Eine Lösung i dominiert eine Lösung j unter Nebenbedingungen, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Lösung i ist gültig, und Lösung j ist ungültig.
- Beide Lösungen sind ungültig, aber Lösung i besitzt eine geringere Verletzung der Nebenbedingungen.
- Beide Lösungen sind gültig, aber i dominiert j nach dem Kriterium der Pareto-Dominanz.

Somit kann die Berücksichtigung von Nebenbedingungen in die dominanzbasierte Rangbildung einbezogen werden. Aus den Bedingungen der Dominanz unter Nebenbedingungen resultiert für jede gültige Lösung ein besserer Rang als für jede ungültige Lösung. Die Rangfolge unter gültigen Lösungen wird anhand ihrer Pareto-Dominanz basierend auf den Zielfunktionswerten ermittelt, während die Rangfolge unter ungültigen Lösungen von deren jeweiliger Verletzung der Nebenbedingungen abhängig ist.

3 Beispiele

Der Algorithmus zur Lösung von Mehrzieloptimierungsproblemen soll im Folgenden auf verschiedene Testprobleme mit mehr als einer Zielfunktion angewendet werden. Dabei soll gezeigt werden, daß sowohl Lösungen nahe der Pareto-optimalen Front gefunden werden, als auch die Diversität der Lösungen gewährleistet wird. Anhand eines konstruierten Optimierungsproblems soll zunächst die Konvergenz des Verfahrens untersucht werden. Ein praxisorientiertes Beispiel zeigt die Anwendung unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen. Für alle nachfolgend dokumentierten Simulationen wird für die Selektion

der Elternindividuen eine Turniergröße von $tournament=2$ verwendet. Die Mutation der Nachkommen erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 und basiert auf einer Normalverteilung, deren Standardabweichung mit zunehmender Generationszahl abnimmt.

3.1 Konstruiertes Testproblem

Eine Reihe verschiedener skalierbarer Testprobleme zur Mehrzieloptimierung werden in [Deb u. a. \(2002\)](#) beschrieben. Die Skalierbarkeit bezieht sich dabei sowohl auf die Dimension des Designvariablenraums als auch auf die Anzahl der Zielfunktionen. Als Dimension des Zielfunktionsraums des Testproblems DTLZ2 wurde $M = 3$ gewählt. Die Anzahl der Designvariablen beträgt $n = 10$. Durch die konstruierte Problemformulierung läßt sich die theoretische Pareto-Front durch einen funktionalen Zusammenhang ausdrücken. Für dieses Beispiel bilden die Pareto-optimalen Lösungen die sphärische Hyperebene $\sum_{m=1}^M (f_m)^2 = 1$ im Zielfunktionsraum. Aufgrund des bekannten Optimums läßt sich für jede während des Optimierungsprozesses gefundene Lösung der Abstand zur tatsächlichen Pareto-Front bestimmen. Für die nachfolgend dokumentierten Simulationen wurde für jede Generation der mittlere Radius \bar{r} der von den Individuen des Archivs aufgespannten Hypersphäre ermittelt. Dadurch ergibt sich ein numerisches Kriterium für den Grad der Konvergenz zur optimalen Front.

Die Abb. (6–8) zeigen die Ergebnisse der Mehrzieloptimierung für Suchläufe mit 2000 und 200 Solveraufrufen. Der Verlauf des Konvergenzkriteriums ist für beide Suchläufe dargestellt. Die resultierende Pareto-Front nach 200 Solveraufrufen ist dem tatsächlichen Optimum gegenübergestellt. Anhand der Ergebnisse wird erkennbar, daß die Geschwindigkeit der Konvergenz mit zunehmender Generationszahl abnimmt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Anzahl der nicht dominierten Individuen schon nach wenigen Generationen sehr hoch ist. Damit läßt sich unter den Lösungen kaum noch eine dominanzbasierte Rangordnung herstellen. Das Fortschreiten der Konvergenz hängt nun hauptsächlich vom Suchpotential der Variationsoperatoren ab. Dieses Problem gewinnt mit zunehmender Dimension des Zielfunktionsraums an Bedeutung, da es dann immer schwieriger wird, besonders unter wenigen Individuen, eine differenzierte Bewertung auf Basis der Pareto-Dominanz durchzuführen.

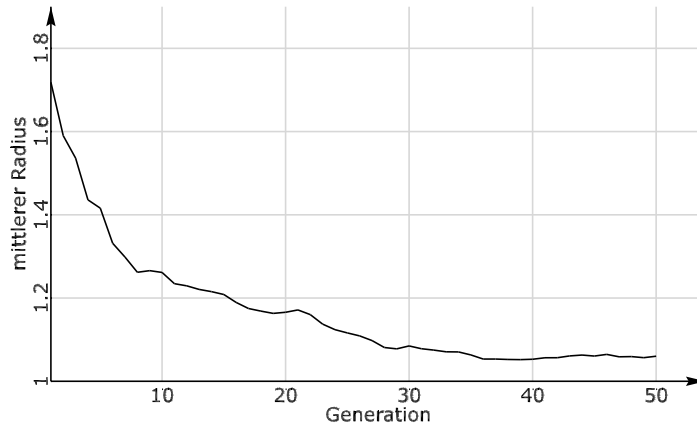


Abbildung 6: DTLZ2: Verlauf von \bar{r} der Lösungen des Archivs über die Anzahl der Generationen (2000 Solveraufrufe).

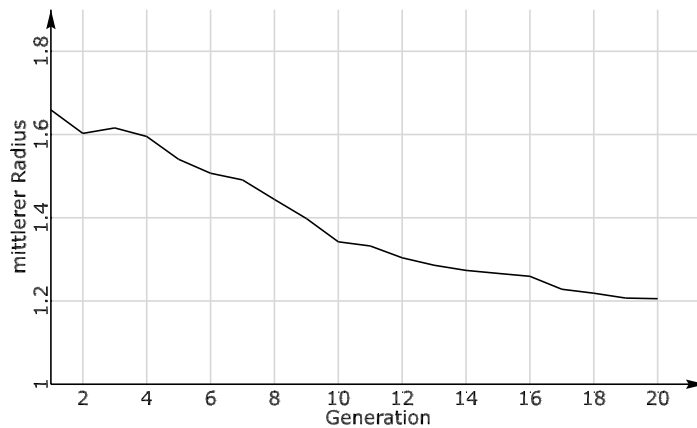


Abbildung 7: DTLZ2: Verlauf von \bar{r} der Lösungen des Archivs über die Anzahl der Generationen (200 Solveraufrufe).

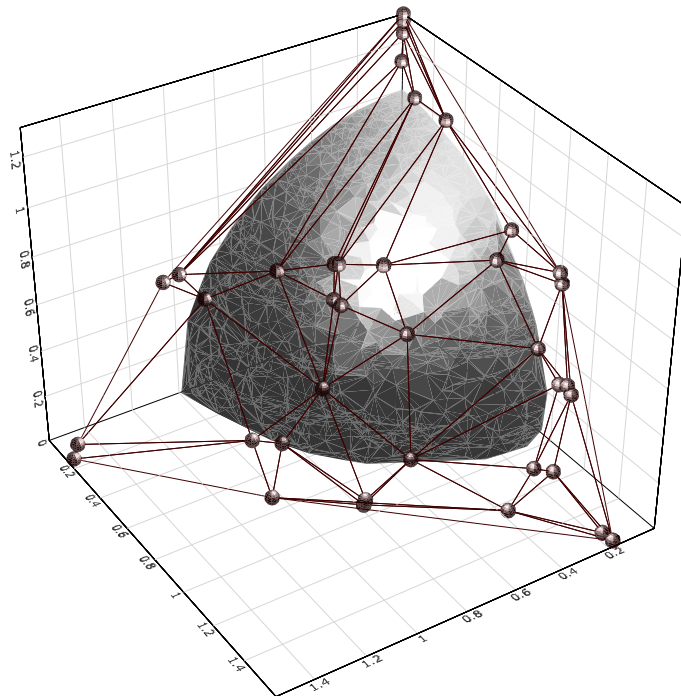


Abbildung 8: DTLZ2: Pareto-Front (Punkte) und theoretisches Optimum (200 Solveraufrufe).

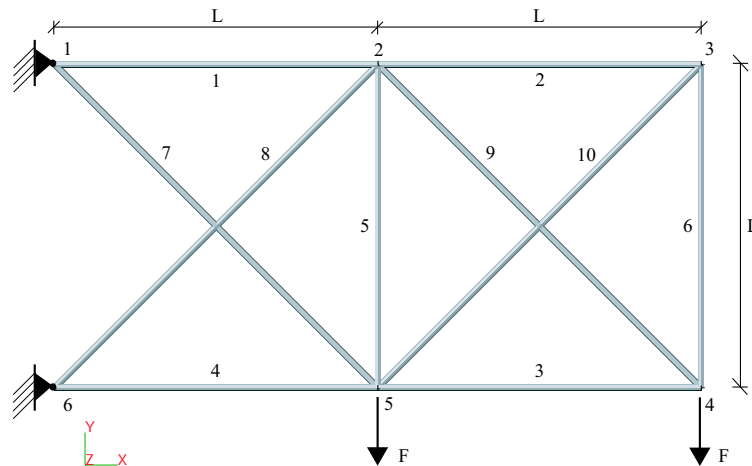


Abbildung 9: 10-Stab-Fachwerk: Geometrie, Elemente, Knoten, Lasten.

3.2 Strukturmechanisches Optimierungsproblem

Das in diesem Abschnitt dokumentierte Beispiel ist ein strukturmechanisches Optimierungsproblem mit zwei konkurrierenden Zielfunktionen. Die Struktur besteht aus einem ebenen 10-Stab-Fachwerkbinder. Die Designvariablen sind die zehn Querschnitte der Fachwerkstäbe. Die zu minimierenden Zielfunktionen sind einerseits das Gewicht der Konstruktion und andererseits die maximale vertikale Knotenverschiebung der Fachwerkknoten. Für den Fachwerkbinder wurden folgende Geometrie- und Materialparameter verwendet:

Elementlänge L	9.0	m
E-Modul	70000	N/mm ²
Dichte	2700	kg/m ³
Last F	45000	N
maximale Spannung	± 170	N/mm ²

Die Materialparameter sind für alle Elemente des Fachwerkbinders identisch. Die Radien der verschiedenen kreisrunden Stabquerschnitte sind durch die Variablen Grenzen $4 \text{ mm} \leq r_i \leq 90 \text{ mm}$ beschränkt. Die in den Fachwerkstäben auftretenden Zug- oder Druckspannungen sollen eine maximal zulässige Spannung nicht überschreiten. Die Berücksichtigung des Überschreitens der zulässigen Spannung erfolgt durch die Formulierung einer Nebenbedingung. Abb. (9) zeigt die Geometrie der Struktur, die Lagerungsbedingungen und die beiden Knotenlasten.

Die Abb. (10) zeigt die Pareto-Front für einen hochgradig konvergierten Suchlauf über 100 Generationen mit ca. 4000 Solveraufrufen. Die Lösungen des Archivs verschiedener Generationen sind als Punkte dargestellt. Es wird deutlich, daß die Lösungen des Archivs nach 25 Generationen bereits eine gute Approximation der Front darstellen. Während der letzten 75 Generationen kann nur noch eine geringe Verbesserung der Ergebnisse erreicht werden.

Die Ergebnisse der Optimierung des 10-Stab-Fachwerkes mittels des genetischen Algorithmus aus OptiSLang und des Mehrzieloptimierungsalgorithmus für jeweils 200 Solveraufrufe sind in Abb. (11) der Pareto-Front für 4000 Solveraufrufe gegenübergestellt.

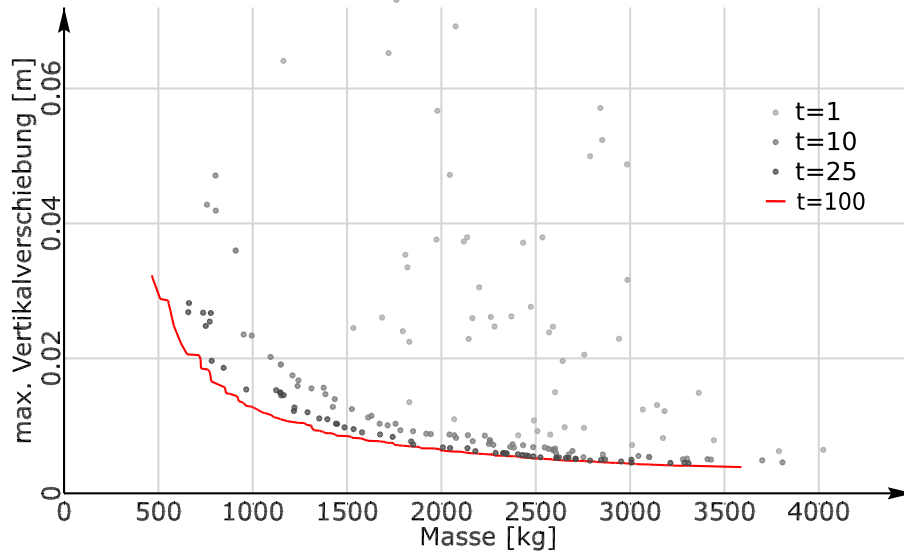


Abbildung 10: 10-Stab-Fachwerk: Ergebnisse eines hochgradig konvergierten Suchlaufes.

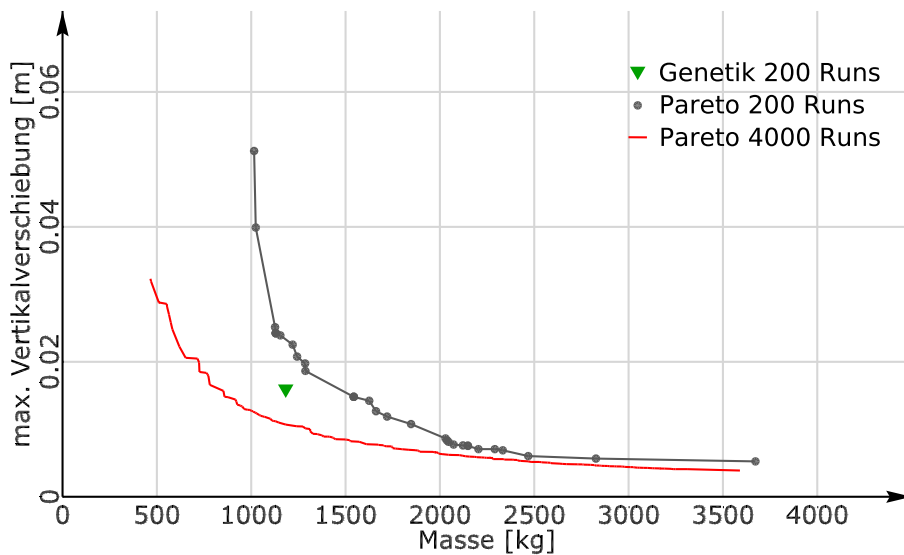


Abbildung 11: 10-Stab-Fachwerk: Ergebnisse der Pareto-Optimierung und des genetischen Algorithmus.

Während der konventionelle GA nur eine Lösung als Ergebnis der Optimierung hervorbringt, liefert die Pareto-Optimierung eine Lösungsfront in einem einzigen Suchlauf. Das Ergebnis des GA übertrifft zwar lokal die Pareto-Front qualitativ, ist dabei jedoch stark abhängig von der vorherigen Wichtung der beiden Zielfunktionen. Die Unabhängigkeit von Skalierfaktoren der Zielfunktionen ist ein wichtiger Vorteil der Pareto-Optimierung.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Die Lösung eines Mehrzieloptimierungsproblems besteht aus einer Front Pareto-optimaler Lösungen, die durch die Anwendung evolutionärer Algorithmen in einem einzigen Suchlauf ermittelt werden können. Der verwendete Algorithmus hat sich als geeignet erwiesen, die Pareto-Front mit einer hohen Diversität der Lösungen zu approximieren. Allerdings ist das Maß der Konvergenz abhängig von der Populationsgröße und der Anzahl der Generationen und somit von den zur Verfügung stehenden Computer-Ressourcen. Es konnte gezeigt werden, daß auch für eine begrenzte Anzahl von Zielfunktionsauswertungen eine aussagekräftige Approximation der Pareto-Front erreicht werden kann. Eine qualitative Aussage über die erzielten Ergebnisse ist jedoch kaum möglich, da der Verlauf der tatsächlichen Pareto-Front a priori nicht bekannt ist. Das beschriebene Verfahren zur Mehrzieloptimierung wird in der künftigen Version von OptiSLang implementiert sein.

Literatur

- COELLO, C. A. C.: List of references on evolutionary multi-objective optimization. (2004).
– URL <http://www.lania.mx/~ccoello/EMOO/EMOObib.html>
- DEB, K.: An efficient constraint handling method for genetic algorithms. In: *Applied Mechanics and Engineering* 186 (2000), Nr. 2–4, S. 311–338
- DEB, K. ; THIELE, L. ; LAUMANN, M. ; ZITZLER, E.: Scalable Multi-Objective Optimization Test Problems. In: *Congress on Evolutionary Computation (CEC'2002)* Bd. 1. Piscataway, New Jersey : IEEE Service Center, 2002, S. 825–830
- SILVERMAN, B. W.: *Density estimation for statistics and data analysis*. London : Chapman and Hall, 1986
- ZITZLER, E. ; LAUMANN, M. ; THIELE, L.: *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. Zurich, Switzerland : Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001 (Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Technical Report 103)