

Materialmodelle für nichtlineare Berechnungen komplexer Mauerwerkstrukturen mit ANSYS

Roger Schlegel, Johannes Will

DYNARDO GmbH, Weimar, Germany

Karl Rautenstrauch

Bauhaus-Universität Weimar, Germany

Summary

Eine wesentliche Eigenschaft des Mauerwerks ist das Lastumlagerungsvermögen. Insbesondere unter Zug- und Schubbeanspruchungen vermag der Mauerwerkverband durch Rissbildungen und Verformungen weniger ausgelastete Strukturbereiche zu aktivieren und sich so der Belastung anzupassen. Risse im Mauerwerk sind daher nicht immer gleichzusetzen mit Überlastung und drohendem Versagen. Sie können ebenso Ausdruck einer Gefügefingung und zur Generierung des Lastabtrags dienlich sein. Deshalb erfordert die zuverlässige Beurteilung des Zustands und der Tragfähigkeit einer Mauerwerkstruktur die Berücksichtigung des nichtlinearen Spannungs-Dehnungsverhaltens, der Versagensmechanismen und der Systemumlagerungen des Mauerwerkverbandes. Einfache (z.B. graphische, empirische oder semianalytische) Berechnungsmethoden sowie linear elastische oder isotrope Materialmodelle können die Werkstoffeigenschaften und Lastumlagerungen von Mauerwerk nicht oder nur in sehr begrenztem Maße beschreiben. Eine typische Problemstellung, in dem sich vielfach die Unzulänglichkeiten derartig vereinfachter Berechnungsmethoden aufzeigt, ist die Bewertung bestehender Mauerwerkstrukturen. Der Einsatz leistungsfähiger numerischer Berechnungsmodelle eröffnet hier neue, deutlich verbesserte und umfassendere Untersuchungs- und Bewertungsmöglichkeiten.

Die numerischen Modellierungsstrategien für Mauerwerk lassen sich grundsätzlich nach der Art der Modellierung des Mauerwerks in Makromodelle (homogene Kontinuumsmodelle) und Mikromodelle (diskrete Modelle) einordnen. Im Rahmen der Makromodellierung wird der Mauerwerkverband als verschmiertes Ersatzkontinuum idealisiert. Mikromodelle sind durch eine diskrete Modellierung der Steine und Fugen gekennzeichnet.

Der vorliegende Beitrag stellt leistungsfähige, an Versuchsergebnissen umfangreich abgesicherte Materialmodelle zur räumlichen Untersuchung komplexer Mauerwerkstrukturen vor. Dabei werden insbesondere Fragen der erforderlichen physikalischen Leistungsfähigkeit der Materialmodelle sowie deren numerische Umsetzung diskutiert. Durch die Implementation dieser Materialmodelle in die FEM-Programmsysteme ANSYS und LSDYNA entstand ein numerischer Tool mit dem es nun möglich ist

das Trag- und Verformungsverhalten sowie die Versagensmechanismen von Mauerwerk in verschiedenen Modellierungsstrategien realitätsnah zu beschreiben. Damit wird ein durchgängiger Modellbildungsprozess ermöglicht, der sowohl detaillierte Aussagen zum Beanspruchungszustand des Mauerwerkverbandes als auch die Darstellung des Gesamttragverhaltens komplexer Mauerwerkstrukturen zulässt.

An praktischen Beispielen werden die Möglichkeiten der realitätsnahen Simulation des Mauerwerks im Rahmen verschiedener Modellierungsstrategien aufgezeigt. Dabei werden Probleme der Tragfähigkeitsbewertung gemauerter Bogenbrücken sowie der Bewertung vorhandener Rissbildungen und Schädigungen an historischen Mauerwerkstrukturen vorgestellt. Die Berechnungen zeigen, dass auch große Mauerwerkstrukturen mit überschaubarem Aufwand dreidimensional untersucht werden können. Dabei wird der Einfluss des für Mauerwerk charakteristischen Lastumlagerungsvermögens, dessen Nachvollziehbarkeit eine wesentliche Voraussetzung für die realistische Untersuchung der Tragfähigkeit einer Mauerwerkstruktur ist, deutlich.

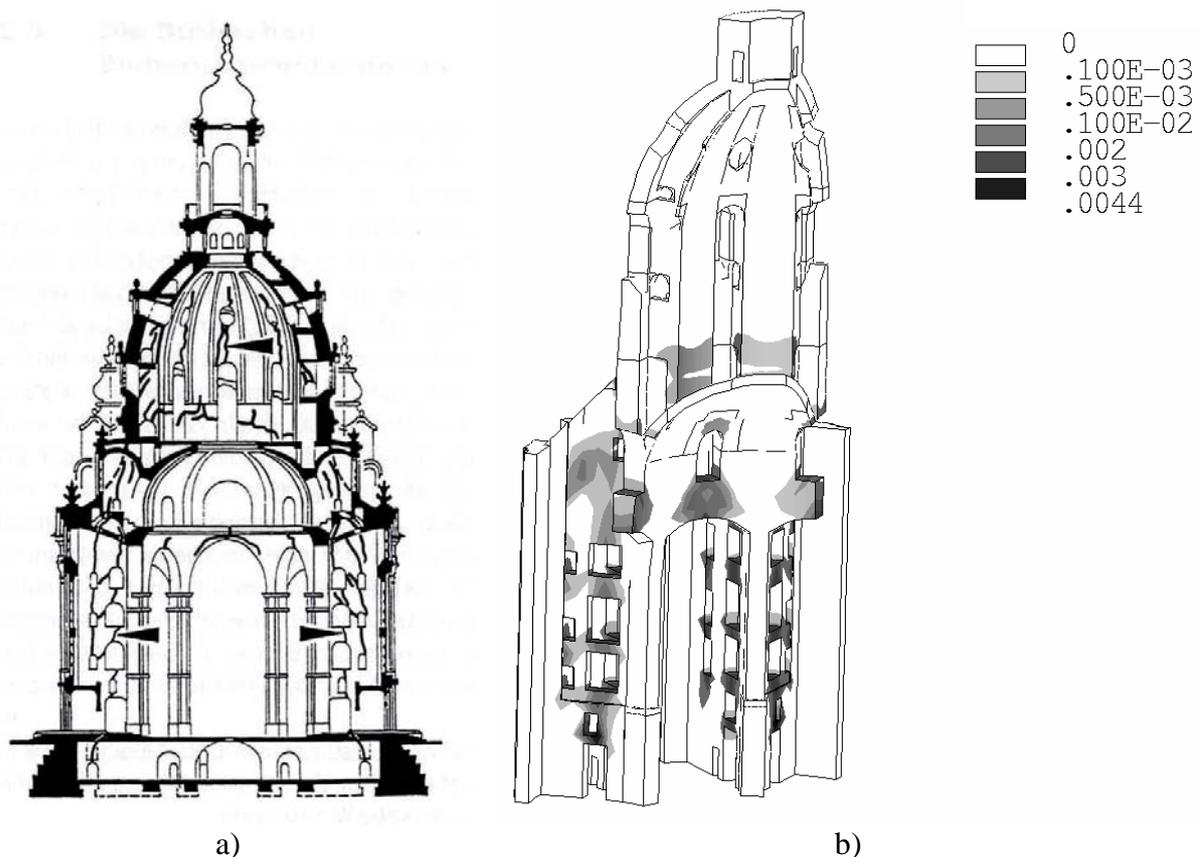


Fig. 1: Beobachtetes und berechnetes Schadensbild der historischen Dresdner Frauenkirche
a) Risskartierung von Rüth (1938); b) Plastische Vergleichsdehnungen am 3D-Modell

Keywords

Mauerwerk, homogene und diskrete Modellierungsstrategien, nichtlineare Materialmodelle

1 Einleitung

Die Möglichkeiten der Bewertung komplexer Mauerwerkstrukturen hinsichtlich ihrer Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit steigen mit der Anwendung numerischer Berechnungsverfahren beträchtlich. Praktische Fragestellungen ergeben sich beispielsweise bei historischen Bauwerken. So gilt es oftmals die Standsicherheit alter Kirchenbauwerke mit Ihren Rissbildungen vor allem im Bereich der Glockentürme einzuschätzen. Nicht selten ist die Tragfähigkeit gemauerter Brücken hinsichtlich der gestiegenen Verkehrslasten nachzuweisen. Immer dann, wenn die Standsicherheit historischer, erhaltenswerter Bausubstanz angezweifelt werden muss, ist es notwendig, mögliche Sanierungsmaßnahmen objektiv hinsichtlich ihrer Wirksamkeit einzugrenzen. Aber auch für modernes Mauerwerk können numerische Berechnungen bei der Begleitung von Versuchen oder der Optimierung konstruktiver Details sinnvoll eingesetzt werden. Eine Voraussetzung für die Aussagekraft der Ergebnisse ist die Verwendung leistungsfähiger Materialmodelle. Diese müssen die spezifischen Gegebenheiten des Mauerwerksverbandes, wie Ein- oder Mehrschaligkeit sowie den Grad der Regelmäßigkeit realistisch abbilden können. Die Berücksichtigung materieller Nichtlinearität ist insbesondere für die Untersuchung von Versagenslasten und Grenzzuständen notwendig um auftretende Kraftumlagerungen zu erfassen. Im Hinblick auf eine praktische Anwendbarkeit für die Berechnung großer Strukturen ist außerdem die numerische Leistungsfähigkeit, d.h. das Konvergenzverhalten und die Rechengeschwindigkeit sowie der Modellierungsaufwand von Bedeutung. Der vorliegende Beitrag stellt die Entwicklung, Verifikation und praktische Anwendung dreidimensionaler Berechnungsmodelle für die rechnerische Simulation verschiedener Mauerwerksarten vor.

2 Dreidimensionale Materialmodelle für verschiedene Mauerwerkarten

Einen dominierenden Einfluss auf die Formulierung eines Materialmodells für Mauerwerk hat der Verband. Dementsprechend ist zwischen regelmäßigen und regellosen Verbänden zu unterscheiden. Regelmäßige Verbände treten bei allen Mauerwerksarten aus künstlichen Steinen und entsprechend bearbeiteten Natursteinen (z.B. im Schichten- oder Quadermauerwerk) auf. Durch die regelmäßige Anordnung der Fugen (Lagerfuge, Stoßfuge, Längsfuge) ist eine ausgeprägte, auf die Fugenrichtungen bezogene orthogonale Anisotropie (Orthotropie) festzustellen. Regellose Verbände sind durch das Fehlen bevorzugter Fugenrichtungen gekennzeichnet. Sie können daher mit isotropen Materialformulierungen zutreffend beschrieben werden.

Das inelastische Riss- und Verformungsverhalten des Mauerwerks wird im vorliegenden Beitrag mit Hilfe der Plastizitätstheorie beschrieben. Die Berücksichtigung der unterschiedlichen Versagensarten und Versagensmechanismen von Mauerwerk (Steinversagen, Fugenversagen, Versagen des Verbandes) wird durch die Verwendung zusammengesetzter Fließbedingungen möglich.

Für die Beschreibung der orthotropen Festigkeit regelmäßiger Mauerwerksverbände wird die von Ganz [3] vorgeschlagene und für den räumlichen Beanspruchungszustand erweiterte Bruchbedingung für Mauerwerk verwendet (Fig. 2).

Für den Sonderfall einer einachsigen, senkrecht zur Lagerfuge gerichteten Druck- und gleichzeitigen Schubbeanspruchung ist eine weitgehende Übereinstimmung mit dem in DIN 1053 enthaltenen Bruchmodell von Mann [5] sowie dem für Schichten- und Quadermauerwerk aus Sandstein vorgeschlagenen Modell von Berndt [2] gegeben. Durch die Verwendung des Bruchmodells von Ganz wird darüber hinaus auch die Interaktion mit einer horizontalen Beanspruchung (senkrecht zur Stoßfuge) berücksichtigt. Zusätzlich geht im entwickelten Berechnungsmodell die Zug-, Schub- und Druckfestigkeit in der dritten Richtung (senkrecht zur Längsfuge) mit ein.

Regellose Mauerwerksgefüge treten nahezu ausschließlich in historischen Strukturen aus Natursteinmauerwerk auf. Die Komplexität des Tragverhaltens und die starke Streuung der im praktischen Fall meist unbekanntem Materialkennwerte bedingen ein einfaches Materialmodell mit möglichst wenigen gut bestimmbar bzw. abschätzbar Eingangsparemtern. Für die Erfassung der näherungsweise isotropen Festigkeit regelloser Mauerwerksgefüge wurde das auf den Hauptspannungsraum bezogene Mohr-Coulombsche Versagenskriterium in Verbindung mit einem Zugspannungskriterium als Fließbedingung gewählt. Diese Fließbedingung hängt lediglich von den drei Materialparametern Winkel der inneren Reibung φ , Kohäsion c und Zugfestigkeit f_t ab. Die beiden erst genannten Kennwerte korrespondieren mit der einaxialen Druckfestigkeit und können daher relativ gut bestimmt werden. Die Zugfestigkeit regellosen Natursteinmauerwerks wird im Regelfall

nahe Null angenommen. Mit Hilfe dieses Materialmodells können regellose Mauerwerksgefüge unter räumlicher Beanspruchung realistisch untersucht werden.

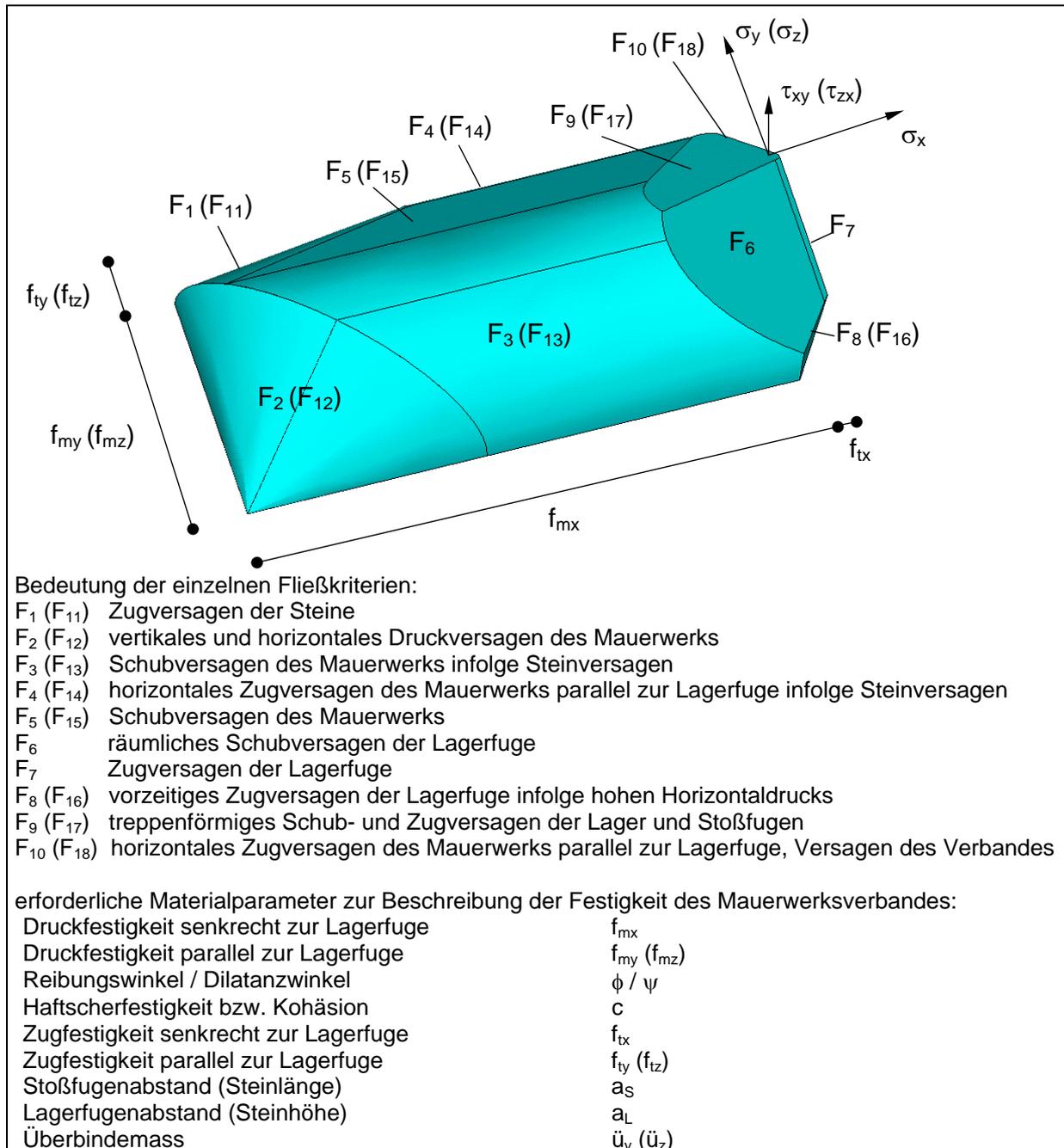


Fig. 2: erweiterte Fließbedingung nach Ganz [3] für regelmäßiges Mauerwerk
(x – vertikal bzw. senkrecht zur Lagerfuge, y, z – parallel zur Lagerfugenrichtung)

Insbesondere bei der Betrachtung historischer Bauwerke wird die große Verbreitung mehrschaliger Mauerwerkstrukturen deutlich. Die Kombination der beiden vorstehend beschriebenen Materialmodelle für regelmäßiges und regelloses Mauerwerk ermöglicht es, einzelne Mauerwerksschalen des Verbandes zu simulieren. Ergänzend muss auch für die Verbundfuge, die im mehrschaligen Verband eine zu berücksichtigende Diskontinuität darstellt, eine zutreffende Materialbeschreibung verwendet werden. Hierfür wird eine auf die Ebene der Verbundfuge bezogene Mohr-Coulombsche Schubspannungsbedingung und eine Zugbruchbedingung senkrecht zur Fugenebene gewählt. Da die übertragbare Zugbeanspruchung entscheidend von der vorhandenen Verzahnung der beiden angrenzenden Mauerschalen abhängt, wurde nach einen Vorschlag von Warnecke [7] der Verzahnungsgrad bei dem entsprechenden Zugspannungskriterium berücksichtigt.

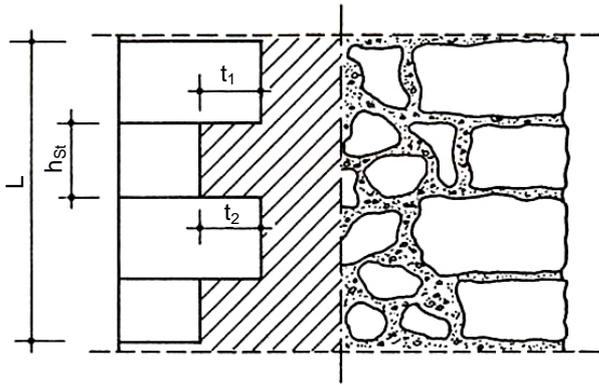


Fig. 3a: Verbundfuge Modell / Realität [7]

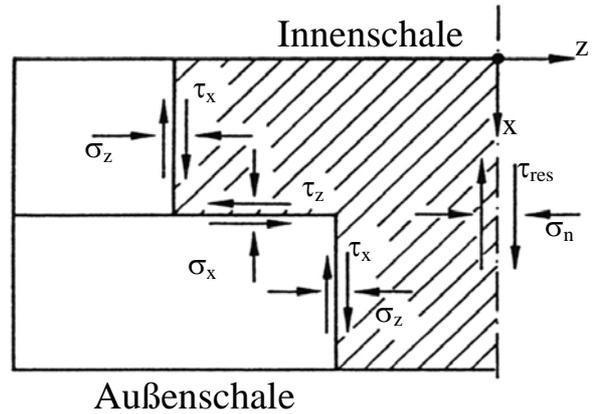


Fig. 3b: Lastabtrag der Verbundfuge [7]

2.1 Anisotropes Riss- und Entfestungsverhalten

Das Entfestungsverhalten von Mauerwerk ist stark von der vorliegenden Beanspruchungsart abhängig. Unter einachsiger Zugbeanspruchung senkrecht zur Lagerfuge ist ein sprödes Materialverhalten zu beobachten. Nach anfänglicher Bildung von Mikrorissen in der Lagerfuge nimmt die Zugfestigkeit infolge rasch fortschreitender Rissöffnung progressiv auf Null ab. Als Maß für die hierfür erforderliche Energie dient die Bruchenergie. Sie wird auch in vorliegenden Berechnungsmodell zur Steuerung der Rissbildung verwendet. Wie Versuche zeigen, kann der Verlauf der Zugentfestung nach einem Vorschlag von Lourenco / Rots [4] mit Hilfe einer e-Funktion zutreffend abgebildet werden. Diese an die Bruchmechanik orientierte Vorgehensweise wird auch in hier vorgestellten Berechnungsmodell verfolgt, wobei die Materialentfestung in Abhängigkeit der auftretenden plastischen Dehnungen (strain softening) beschrieben wird.

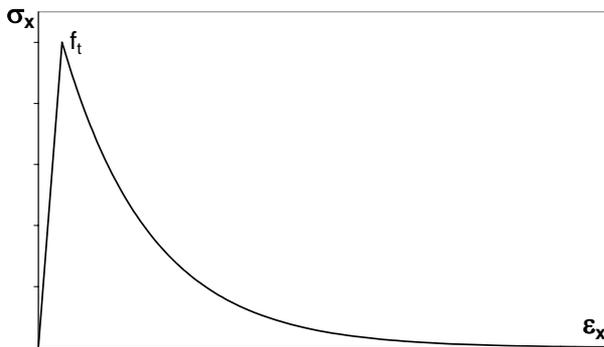


Fig. 4: Zugentfestung senkrecht zur Lagerfuge

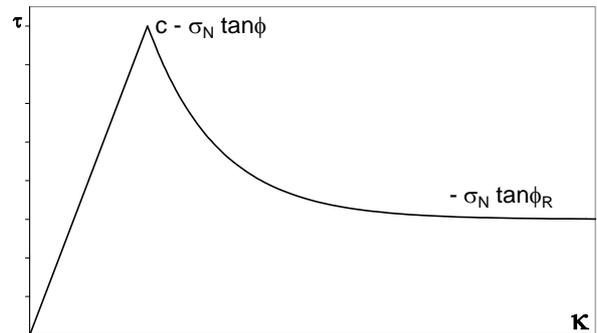


Fig. 5: Schubentfestigung (Fugenversagen)

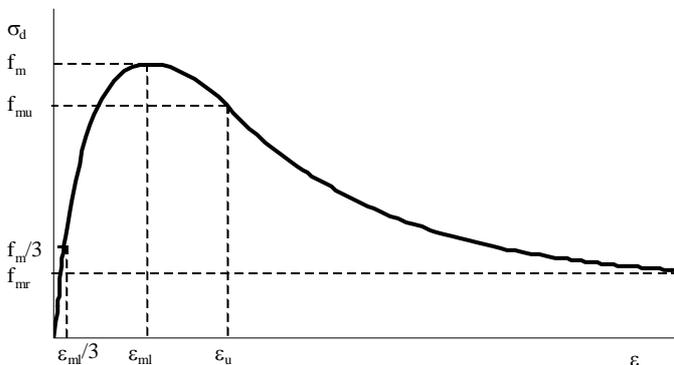


Fig. 6: Spannungs-Dehnungsbeziehung bei Druckbeanspruchung

Infolge einer Schubbeanspruchung ist das Entfestigungsverhalten von Mauerwerk dagegen relativ duktil. Nach dem Erreichen der Schubfestigkeit wird der Abbau der Kohäsion in Analogie zur Zugfestigkeit mit Hilfe einer e-Funktion beschrieben, wohingegen der Reibungswinkel φ linear auf einen Restwert φ_r abfällt.

Wie auch die Versuche von Backes [1] zeigen, sind hinsichtlich des horizontalen Zugbruchverhaltens parallel zur Lagerfuge sind zwei Entfestigungsfälle zu unterscheiden. Für das bei hohen Auflasten auftretende Steinversagen (Kriterien F_4, F_{14}) wird ein sprödes Materialversagen analog zum Zugversagen senkrecht zur Lagerfuge berücksichtigt. Wird ein Fugenversagen (Kriterium F_{10}, F_{18}) identifiziert, so wird die nachfolgende Entfestigung analog zur Schubentfestigung als relativ duktil angenommen.

Grundsätzlich sind die einzelnen Zug- und Schubentfestigungen miteinander gekoppelt, so dass z.B. bei Auftreten eines Zugrisses in der Lagerfuge neben der Degradation der Zugfestigkeit auch die Kohäsion durch die Schädigung des Haftverbundes gleichermaßen abgebaut wird.

Die berücksichtigte Spannungs-Dehnungsbeziehung infolge einer Druckbeanspruchung (Fig. 6) wurde an das aus Versuchen bekannte Verhalten angepasst. Dabei tritt nach dem Erreichen der Dehnung bei Höchstspannung ε_u eine progressive Entfestigung auf. Der Entfestigungspfad fällt bis auf eine aus numerischen Gründen erforderliche geringe Restspannung bei Erreichen der Bruchdehnung ε_{cr} linear ab.

3 Numerische Implementation der elastoplastischen Stoffgesetze

Im Rahmen der verwendeten elastoplastischen Materialmodelle wird angenommen, dass sich der Vektor der Gesamtdehnungen in einen elastischen und einen irreversiblen (plastischen) Anteil zerlegen lässt.

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \quad (1)$$

Im elastischen Bereich werden die Spannungen und Dehnungen gemäß dem Hookeschen Gesetz verknüpft. Die differentielle Spannungs-Dehnungs-Beziehung ergibt sich zu:

$$d\sigma = D d\varepsilon^{el} = D (d\varepsilon - d\varepsilon^{pl}) \quad (2)$$

Die Fließbedingung $F(\sigma, \kappa)$ begrenzt den elastischen Spannungsraum. Spannungen außerhalb der Fließfigur sind unzulässig, so dass gilt:

$$F(\sigma, \kappa) \leq 0 \quad (3)$$

Die Entfestigungsfunktion $\Omega(\kappa)$ beschreibt die vom Belastungspfad abhängige Vergrößerung bzw. Verkleinerung (Ver- bzw. Entfestigung) sowie eine Translation der Fließbedingung im Spannungsraum. Für die hier gewählte dehnungsgesteuerte Entfestigung stellt die skalare Größe κ ein Maß der plastischen Dehnungen dar. Die Formulierung eines anisotropen, vom Versagensmode abhängigen Entfestigungsmodells wurde durch Einführung separater Entfestigungsfunktionen für die jeweiligen Festigkeitsparameter möglich. Dabei wurden vorhandene Kopplungen wie z.B. Zug – Schub – Interaktionen (Mixed Mode) berücksichtigt.

Die auftretenden plastischen Dehnungen werden mit Hilfe der Fließregel

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\partial Q(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma} \quad (4)$$

ermittelt. Bei Verwendung nichtassoziierter Fließregeln lassen im Versuch beobachtete Effekte, wie z.B. Dilatanz realistisch steuern, was für Mauerwerk vor allem im Falle von Schub- und parallel zur Lagerfuge gerichtetem Zugversagen von Bedeutung ist.

Die konsistente numerische Verarbeitung der verwendeten mehrflächigen Fließbedingung erfordert die Berücksichtigung, dass mehrere Fließkriterien gleichzeitig verletzt sein können. Die Ermittlung der plastischen Multiplikatoren λ muss daher die Interaktion der einzelnen Fließkriterien berücksichtigen. Verletzt der Versuchsspannungszustand i Fließkriterien, ergibt sich ein Gleichungssystem von $n = i$ Gleichungen:

$$F_n = \sum_{j=1}^{\text{Anz. aktiver F.}} \left[\left\{ \frac{\partial F_n}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q_j}{\partial \sigma} - \frac{\partial F_n}{\partial \kappa_n} \frac{\partial \kappa_n}{\partial \lambda_j} \right] d\lambda_j \quad (5)$$

mit $d\lambda_j \geq 0$

Auf globaler Systemebene werden bei impliziten FE-Programmen die auftretenden Ungleichgewichtskräfte mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens umgelagert. Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens kann die Bildung der elastoplastischen Tangente D_{EP} , deren Berechnung ebenfalls in den beschriebenen Algorithmen enthalten ist, dienen. Die vorgestellten Stoffmodelle wurden für Scheiben-, Schalen- und Volumenelemente in das implizite FEM - Programmsystem ANSYS® und in das explizite FEM - Programm LSDYNA3D® implementiert. Die detaillierte Dokumentation und Verifikation der Modelle wie auch die Ableitung weiterer sehr leistungsfähiger Mikromodelle sind in [6] enthalten.

4 Tragfähigkeitsuntersuchungen der Göltzschtalbrücke

Die von 1846 – 1851 im sächsischen Vogtland unter Leitung von Schubert und Wilke erbaute 600 m lange und 100 m hohe Göltzschtalbrücke war seinerzeit das mit Abstand höchste Eisenbahnviadukt der Welt. Die durchgängig im regelmäßigen Verband gemauerte Brücke setzte eine rassante Entwicklung der maschinellen Massenproduktion von Mauerziegeln in Gang. Noch heute ist die Göltzschtalbrücke in voller Nutzung durch den Fahrbetrieb der Deutschen Bahn AG. Da das Bauwerk einer regelmäßigen Wartung und Inspektion bedarf, wurde es notwendig, die Befahreinrichtung an der Brücke zu erneuern und zu erweitern. Im Rahmen dieser Baumaßnahmen wurde von der Deutschen Bahn AG eine erstmalige rechnerische Überprüfung der Standsicherheit unter Berücksichtigung der neu einzutragenden Belastungen gewünscht. Die Modellierung des Brückenbauwerkes erfolgte als 3D-Modell. Dabei wurde der Bereich von Achse P bis Z, d.h. fünf Stützen- und Bogenreihen beiderseits der großen Mittelbögen in Achse U modelliert. Daraus ergibt sich eine Länge des Berechnungsausschnittes von 190,14 m. Zur realistischen Erfassung des räumlichen Gesamttragverhaltens wurden alle vier Brückenebenen berücksichtigt. Unterschiedliche Materialbereiche (Naturstein- und Ziegelmauerwerk) wurden in den relevanten Bereichen (Bögen und Pfeiler) berücksichtigt.



Fig. 7a: Göltzschtalbrücke

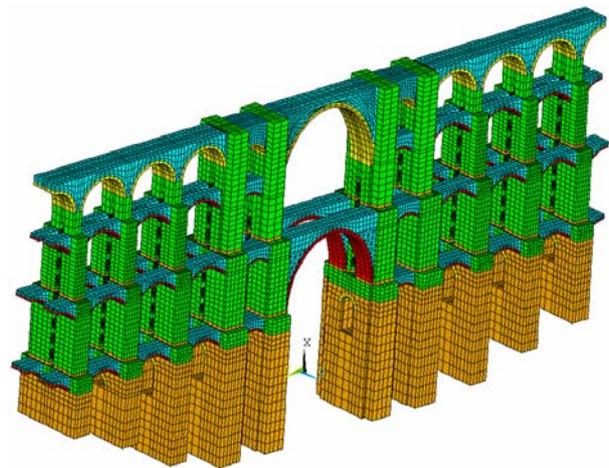


Fig. 7b: FE-Modell

Ein Ergebnis der Berechnungen sind die in Folge des Lastfalles Eigengewicht auftretenden Kraftumlagerungen. Die in Fig. 8 dargestellten plastischen Vergleichsdehnungen dieses Lastfalls zeigen den Effekt der Initiierung der Ausgangslage und damit einhergehende Aktivierung der Bogentragwirkung sehr deutlich. Die auftretenden plastischen Dehnungen in den Aufmauerungsbereichen der Bögen resultieren hauptsächlich aus den aktiven Fließkriterien F6 bzw. F9 und damit aus der Umlagerung unzulässiger Schub- und Zugspannungen. Hier entzieht sich das nicht in Bogenrichtung gemauerte Mauerwerk dem Lastabtrag und wirkt daher zu einem gewissen Anteil als Auflast der Bögen. In Folge dieser Kraftumlagerung wird die Bogentragwirkung des in Bogenrichtung gemauerten Bereiches erst aktiviert.

NODAL SOLUTION

ANSYS 5.7.1

FEB 13 2002

STEP=1
SUB =14
TIME=1
EPPLEQV (AVG)
EffNu=0
DMX =.029145
SMX =.004658

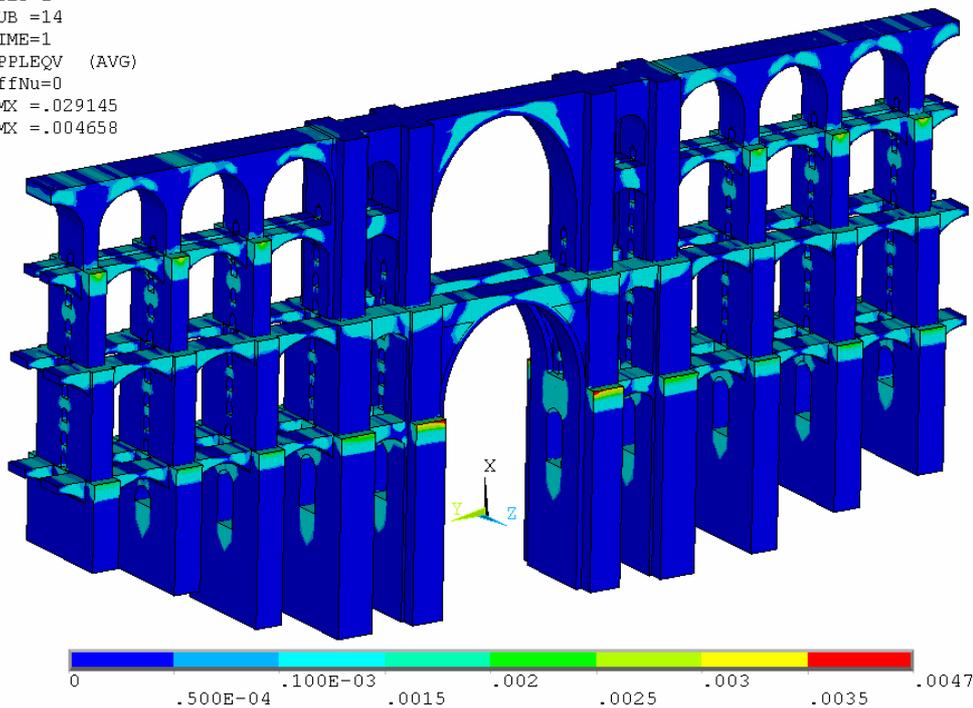


Fig. 8: Berechnung Göltzschtalbrücke: Aktivierung der Bogentragwirkung im Eigengewichtslastfall durch plastische Umlagerungen

Es wurde besonders deutlich, dass eine realistische Untersuchung des Spannungs-, Riss- und Verformungszustandes derartiger gemauerter Brückenviadukte nur bei Berücksichtigung der nichtlinearen Struktur- und Materialantwort möglich ist. Lineare Berechnungen vermögen nicht die Aktivierung der Bogentragwirkung unter Eigengewicht wiederzugeben. Damit würde die Brücke als Durchlaufbalken mit überwiegender Biegebeanspruchung berechnet, was zu völlig falschen, den Lastfluss und die Tragwirkung unzutreffend beschreibenden Aussagen führen würde. Ebenso könnten Lastumlagerungen, wie sie insbesondere infolge von Temperaturbeanspruchungen zu verzeichnen sind nicht berücksichtigt werden. Sinnvolle Aussagen zu Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit wären dann nicht möglich. Als weitere Notwendigkeit zur richtigen Erfassung der Bauwerksbeanspruchung ergab sich hier die dreidimensionale Strukturmodellierung. Mit Hilfe des 3D-Modells wurde es möglich, die Ausmittigkeit und ungünstige Überlagerung verschiedener Einwirkungen zu berücksichtigen sowie die volle Aktivierung der Tragreserven der Mauerwerkskonstruktion sicher zu stellen. Die Durchrechnung einer Lastfallkombination erfolgte in weniger als 18 Stunden.

5 Zur Berechnung mehrschaliger Wandkonstruktionen

Sehr häufig sind bei historischen Mauerwerksbauwerken mehrschalige Wandkonstruktionen anzutreffen. Eine wesentliche Frage bei der Berechnung derartiger Tragstrukturen betrifft das Zusammenwirken der einzelnen Wandschichten. Insbesondere ist bei den meist dreischaligen Wänden zu klären, in wie weit sich die i.A. regellose Innenschicht am Lastabtrag beteiligt und in welchem Maße sie Kräfte an die Außenschalen abgibt. Eine realistische Einschätzung dieser Interaktion ist wichtig, wenn es um die Bewertung der Tragfähigkeit des Gesamtsystems geht. In verschiedenen Fallstudien wurde der Abtrag des Eigengewichtes der Innenschicht sowie die Beanspruchung infolge vertikaler Auflast untersucht. Dabei wurde die Festigkeit der Innenschicht variiert. Es zeigt sich, dass nur das Innenschichtmauerwerk sehr geringer Festigkeit einen nennenswerten Seitendruck auf die Außenschalen ausübt. Dabei führt der in der Literatur gelegentlich vorgeschlagene Silodruckansatz zu einer deutlichen Überschätzung der entstehenden Seitendruckbeanspruchung.

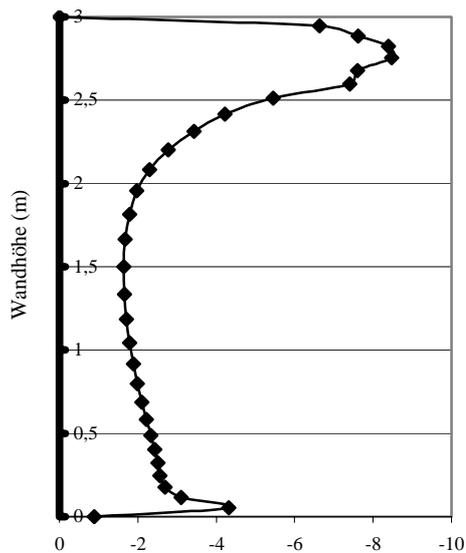


Fig. 9a: Seitendruckspannungen infolge vertikaler Auflast auf die Innenschicht

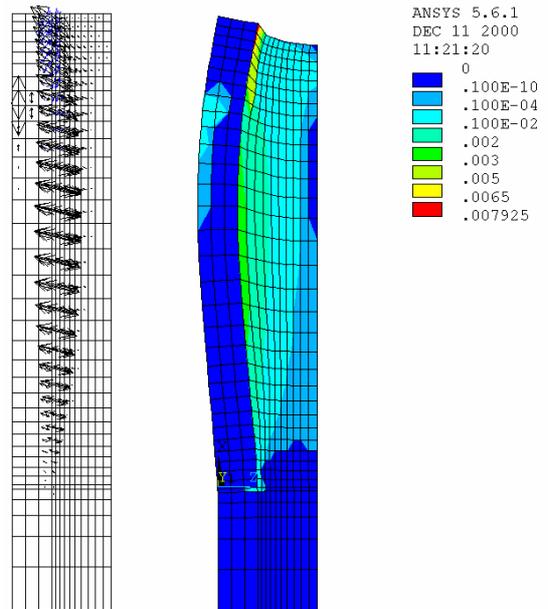


Fig. 9b: zugehörige plastische Dehnungen

References

- [1] Backes H.P.: Zum Verhalten von Mauerwerk bei Zugbeanspruchung in Richtung der Lagerfugen, Dissertation, RWTH Aachen, 1985.
- [2] Berndt, E.: Zur Druck- und Schubfestigkeit von Mauerwerk – experimentell nachgewiesen an Strukturen aus Elbsandstein. In: Bautechnik 73, 1996, S. 222-234, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1996
- [3] Ganz, H.R.: Mauerwerkscheiben unter Normkraft und Schub. ETH Zürich, Institut für Baustatik und Konstruktion. Birkhäuser Verlag Basel, 1985
- [4] Lourenco, P. B.; Rots, J.G.: On the use of micro-models for the analysis of masonry shear-walls. Proceedings 2. Int. Symp. on Comp. Meth. in Structural Masonry, Swansea, 1993
- [5] Mann, W.; Müller, H.: Schubtragfähigkeit von gemauerten Wänden und Voraussetzungen für das Entfallen des Windnachweises. Berlin: Ernst u. Sohn. In: Mauerwerk.Kalender 10, 1985
- [6] Schlegel, R.: Numerische Berechnung von Mauerwerkstrukturen in homogenen und diskreten Modellierungstrategien. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar (2004)
- [7] Warnecke, P.: Tragverhalten und Konsolidierung von historischem Natursteinmauerwerk. Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Dissertation, TU Braunschweig, 1995