

**Vorträge**

**Materialmodelle für das  
Bauwesen und die Geotechnik  
in ANSYS**

Roger Schlegel

# Materialmodelle für das Bauwesen und die Geotechnik in ANSYS

Roger Schlegel

Dynardo GmbH, Weimar, Germany

## Zusammenfassung

Die Materialbibliothek Multiplas erweitert das in ANSYS vorhandene Spektrum an Materialmodellen mit der speziellen Ausrichtung der nichtlinearen Simulation von Baustoffen und Geomaterialien. Multiplas bietet die Möglichkeit, elastoplastische Effekte zahlreicher künstlicher und natürlicher Baustoffe zu berücksichtigen. Die Materialmodelle beruhen auf elasto-plastischen Fließfunktionen mit assoziierten und nichtassoziierten Fließregeln. Die Materialbibliothek beinhaltet einen leistungsfähigen und robusten elasto-plastischen Algorithmus zur Verarbeitung ein- und mehrflächiger Plastizität. Eine Besonderheit der Materialmodelle liegt in der Kopplung isotroper und anisotroper Fließbedingungen. Es können bis zu 4 Trennflächenscharen mit isotropen Fließfunktionen verknüpft werden. Die Gefügeflächen bzw. Trennflächen (Joints) können im Raum beliebig ausgerichtet werden. Isotrope und anisotrope Fließflächen können in vielfältiger Weise verknüpft werden. Nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen wie auch Materialschädigungen und Rissbildungen können durch verschiedene Hardening- und Softeningansätze berücksichtigt werden. Die Leistungsfähigkeit der einzelnen Materialmodelle für Fels, Sand, Boden, Beton, Mauerwerk und Mörtel wurden in zahlreichen Verifikationen und Versuchsnachrechnungen nachgewiesen.

## Keywords

Elastoplastische Materialmodelle, nichtlineares Materialverhalten, Beton, Fels, Mauerwerk, Stein, Mörtel, Boden, Sand

## 1. Einleitung

Die meisten Materialien im Bauwesen und der Geotechnik weisen ein ausgeprägtes nichtlineares Materialverhalten auf. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass viele Baustoffe (wie z.B. Beton, Fels und Mauerwerk) zwar sehr druckfest sind, jedoch eine relativ geringe Zugfestigkeit oder Schubfestigkeit besitzen. Deshalb müssen in der Planung (wie z.B. beim Stahlbetonbau) unvermeidbare Rissbildungen berücksichtigt und gesteuert bzw. begrenzt werden.

Die Anwendung leistungsfähiger FE-Software im Bauwesen lohnt vor allem für komplexe Strukturen, die durch räumliche Tragwirkungen und Lastumlagerungen geprägt sind. Nichtlineares Materialverhalten ist hierbei in der Regel zu berücksichtigen. Deshalb ist es notwendig Materialmodelle, welche das nichtlineare Spannungs-Verformungsverhalten und die verschiedenen Versagensmechanismen der einzelnen Baustoffe beschreiben können, bereitzustellen. Die hier im Folgende vorgestellte Materialbibliothek ANSYS-Multiplas erweitert den verfügbaren Umfang von ANSYS um spezielle Materialmodelle für das Bauwesen und die Geotechnik. Die Materialmodelle sind sowohl in Volumenelementen (z.B. SOLID 45, SOLID 95) als auch in Schalen- (z.B. SHELL 43, SHELL 93) oder Plattenelementen (z.B. PLANE 42, PLANE 82) verfügbar.

In Tab. 1 ist eine Übersicht über verfügbare Materialmodelle in Multiplas und Beispiele für bereits erfolgreich durchgeführte Werkstoffsimulationen zusammengestellt.

Materialmodell	Werkstoff z.B.
Mohr-Coulomb isotrop + anisotrop, Zugspannungsbegrenzung	geklüfteter Fels
Mohr-Coulomb isotrop, Zugspannungsbegrenzung	intaktes Gestein
Mohr-Coulomb anisotrop, Zugspannungsbegrenzung	Trennflächen, Fugen
Drucker-Prager singularär	Beton, Stahlbeton, Mörtel
Ganz, Drucker-Prager, Mann	Mauerwerk
Drucker-Prager	Boden / Sand / Schotter
Tresca, v.Mises	Stahl
Tsai / Wu	Holz
Zugspannungsbegrenzung (isotrop, anisotrop)	Rissmodell fixed / rotated

**Tab.1:** Materialmodelle in Multiplas

In den Materialmodellen können folgende Phänomene berücksichtigt werden

- isotrope / anisotrope Plastizität
- assoziierte / nicht assoziierte Plastizität, Steuerung des Dilatanzverhaltens
- Ver- und Entfestigung, Restfestigkeiten
- crushing / cracking
- Temperaturabhängigkeit

Die Materialbibliothek Multiplas wurde innerhalb der User-Schnittstelle Userpl umgesetzt. Die Aktivierung erfolgt über tb-Kommandos:

```
tb,user,mat,,80           mat - Materialnummer
tbda,1,LAW, , ,          Belegung des Datenfeldes mit dem gewählten Materialmodell (LAW)
                           und den zugehörigen Materialkennwerten
```

Im ANSYS-Postprozessing können neben den plastischen Dehnungen auch die plastischen Aktivitäten ausgegeben werden. Die plastischen Aktivitäten dienen der Darstellung welches Fließkriterium an dem jeweiligen Strukturbereich aktiv, d.h. verletzt ist. Hieraus sind Schlussfolgerungen über die Art und Ursache der Lastumlagerungen möglich.

Die erfolgreichen praktischen Anwendungen der Materialmodelle erstrecken sich von nichtlinearen Mauerwerksberechnungen [1], [2] oder Beton- bzw. Stahlbetonberechnungen [3], dem Nachweis von Stahltragwerken [4] bis zu Standsicherheitsberechnungen im Boden [5] oder geklüfteten Fels [6].

## 2. Theorie der Multiplas-Materialmodelle

Die Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens mit Hilfe der Plastizitätstheorie setzt voraus, dass sich der Vektor der Gesamtdehnungen in einen elastischen und einen plastischen (irreversiblen) Anteil zerlegen lässt.

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \tag{1}$$

Im elastischen Bereich werden die Spannungen und Dehnungen gemäß dem Hookeschen Gesetz verknüpft. Die differentielle Spannungs-Dehnungs-Beziehung ergibt sich zu

$$d\sigma = D d\varepsilon^{el} = D (d\varepsilon - d\varepsilon^{pl}). \quad (2)$$

Die Grenze zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich wird allgemein durch die Fließbedingung  $F$  als eine skalarwertige Funktion in Abhängigkeit von dem Spannungszustand  $\sigma$  und dem Verfestigungsparameter  $\kappa$  definiert.

$$F(\sigma, \kappa) = 0 \quad (3)$$

Der Verfestigungsparameter  $\kappa$  berücksichtigt die Abhängigkeit der Fließbedingung von der Belastungsvorgeschichte und damit auch von der Größe auftretender plastischer Dehnungen. So kann es bei Plastifizierungen zu einer Vergrößerung bzw. Verkleinerung (Verfestigung bzw. Entfestigung) oder zu einer Translation (kinematische Verfestigung) der Fließfigur im Spannungsraum kommen. Der Verfestigungsparameter  $d\kappa$  wird als ein Maß der äquivalenten plastischen Dehnung  $d\varepsilon_{eq}^{pl}$  ausgedrückt (strain hardening / softening).

$$d\kappa = d\kappa(\varepsilon^{pl}) = d\varepsilon_{eq}^{pl} \quad (4)$$

Während elastische Spannungszustände durch

$$F(\sigma, \kappa) < 0 \quad (5)$$

charakterisiert sind, liegen beim Auftreten plastischer Dehnungen die zugehörigen Spannungszustände immer auf der Fließfläche. Durch weitere Belastungssteigerungen werden dann Spannungsumlagerungen hervorgerufen. Diese Forderung wird durch die Konsistenzbedingung beschrieben, wonach gilt:

$$\begin{Bmatrix} \partial F \\ \partial \sigma \end{Bmatrix}^T d\sigma + \begin{Bmatrix} \partial F \\ \partial \kappa \end{Bmatrix} d\kappa = 0 \quad (6)$$

Die plastischen Dehnungsinkremente werden mit Hilfe der Fließregel

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (7)$$

berechnet. Die partielle Ableitung des plastischen Potentials  $Q$  nach den Komponenten des Spannungsvektors  $\sigma$  bestimmt die Richtung des plastischen Dehnungsinkrements. Für den Fall einer assoziierten Fließregel entspricht das plastische Potential der Fließbedingung

$$Q(\sigma, \kappa) = F(\sigma, \kappa). \quad (8)$$

Die Anwendung nichtassoziierter Fließregeln (z.B. zur Steuerung der Dilatation) hat zur Folge, dass

$$Q(\sigma, \kappa) \neq F(\sigma, \kappa). \quad (9)$$

Um weiterhin die Stabilität des Werkstoffes zu erhalten, muß bei der Formulierung von  $Q(\sigma, \kappa)$  gewährleistet bleiben, dass bei Aufrechterhaltung einer konvexen Fließfigur die auftretende plastische Energie nicht negativ, bzw. größer als bei assoziierter Plastizität wird.

Der plastische Multiplikator  $d\lambda$  dient als positiver Skalierungsfaktor zwischen dem Gradienten des plastischen Potentials und dem plastischen Dehnungszuwachs. Aus dem Einsetzen von Gl. (7) in (2) folgt:

$$d\sigma = D \left( d\varepsilon - d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \quad (10)$$

Wird nun Gl. (10) in Gl. (6) eingeführt, so folgt daraus

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - H d\lambda = 0 \quad (11)$$

mit  $H = -\frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\lambda}$  (Verfestigungsmodul)

und der plastische Multiplikator kann mit

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + H} \quad (12)$$

berechnet werden.

Die elastoplastische Tangentenmatrix  $D_{EP}$  stellt die Verknüpfung zwischen den differentiellen Spannungs- und Dehnungszuwächsen dar:

$$d\sigma = D_{EP} d\varepsilon \quad (13)$$

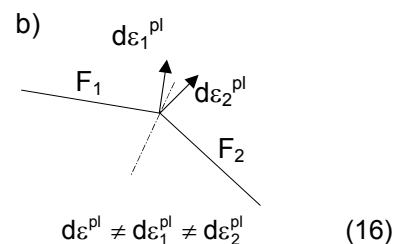
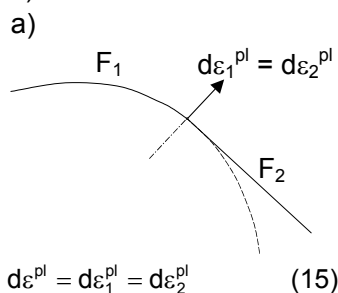
Sie ergibt sich durch Einsetzen von (12) in (10) zu

$$D_{EP} = D - \frac{D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D^T}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + H} \quad (14)$$

Während bei Verwendung assoziierter Fließregeln  $D_{EP}$  immer symmetrisch ist, wird sie infolge der Einführung nichtassoziierter Fließregeln unsymmetrisch, was zusätzlichen numerischen Aufwand bei der Gleichungslösung nach sich zieht.

## 2.1 Mehrflächige Plastizität

Die Berücksichtigung unterschiedlicher Versagensarten bzw. Versagensmechanismen eines Materials ist durch eine aus mehreren Fließkriterien zusammengesetzte Fließbedingung möglich. Der Übergang zwischen den einzelnen Fließkriterien kann sowohl kontinuierlich als auch durch eine Kante ausgebildet sein. Im Fall des kontinuierlichen Übergangs sind die plastischen Dehnungszuwächse der beiden Fließkriterien im Schnittbereich gleich (Fig. 1a). Schneiden sich die Fließkriterien in einer Schnittkante stimmen die plastischen Dehnungszuwächse im Schnittbereich nicht mehr überein (s. Fig.1b).



**Fig.1:** Übergang zwischen zwei Fließkriterien  $F_1$  und  $F_2$  a) kontinuierlich; b) Schnittkante

Bei der numerischen Behandlung solcher Eckbereiche ist die Interaktionen der Fließkriterien untereinander zu berücksichtigen. Die plastischen Multiplikatoren werden in Analogie zu Gl. (12) aus einem Gleichungssystem ermittelt. Für das Beispiel von  $n = j$  gleichzeitig aktiven Fließkriterien bedeutet das

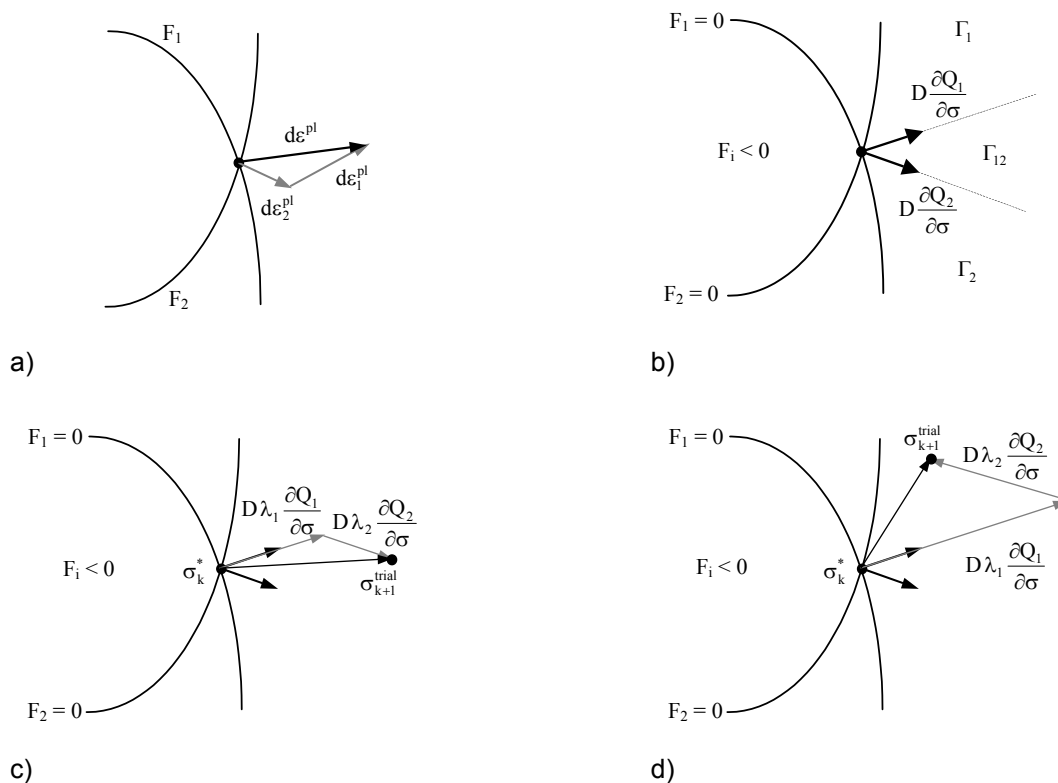
$$\left\{ \frac{\partial F_n}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon = \sum_{j=1}^{\text{Anz. aktiver F.}} \left[ \left\{ \frac{\partial F_n}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q_j}{\partial \sigma} + \frac{\partial F_n}{\partial \kappa_n} \frac{\partial \kappa_n}{\partial \lambda_j} \right] d\lambda_j \quad (17)$$

Durch die Einführung einer progressiven Ver- oder Entfestigung wird die Materialfestigkeit und damit auch das jeweilige Fließkriterium eine Funktion der plastischen Dehnungsrate (Gl. 3). Folglich ist die Lösung des Gleichungssystems (Gl. 17) zur Bestimmung der plastischen Multiplikatoren nur iterativ möglich. Dabei ist die Überschreitung eines Fließkriteriums allein keine hinreichende Bedingung mehr. Simo/Kennedy [7] führen zusätzlich noch eine Aktivitätsbedingung ein, welche sichert, dass die Spannungsrückführung in den Schnittpunkt der Fließkriterien und das Auftreten der zugehörigen plastischen Dehnungssinkremente auch physikalisch sinnvoll ist (s. Fig.2). Demgemäß gilt für die nach (17) ermittelten plastischen Multiplikatoren

$$d\lambda_n \geq 0. \quad (18)$$

Das plastische Dehnungssinkrement  $d\varepsilon^{pl}$  setzt sich dann analog zu Gl. (7) aus der Linearkombination der Anteile aktiver Fließkriterien zusammen [8].

$$d\varepsilon^{pl} = \sum_{j=1}^{\text{Anz. aktiver F.}} d\lambda_j \frac{\partial Q_j}{\partial \sigma} \quad (19)$$



**Fig.2:** Geometrische Interpretation der Aktivitätsbedingung (18)

- a) resultierende plastische Dehnung zweier aktiver Fließkriterien;
- b) Definition der Bereiche  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_{12}$ ;
- c) beide Fließkriterien sind aktiv,  $d\lambda_1$  und  $d\lambda_2 > 0$  (Bereich  $\Gamma_{12}$ );
- d) Aktivität beider Fließkriterien ist nicht sinnvoll,  $d\lambda_1 > 0$  jedoch  $d\lambda_2 < 0$  (Bereich  $\Gamma_1$ )

### 3. Return Mapping Verfahren zur lokale Spannungsrelaxation

Für die konsistente numerische Umsetzung des elastoplastischen Materialverhaltens wird das von Ortiz/Simo [9] und Simo/Taylor [10] vorgestellte Return Mapping Verfahren verwendet. Wie von Simo et al. nachgewiesen wurde, ist dieses Verfahren für finite Deformationen und konvexe, stetige Fließbedingungen unbedingt stabil. Der lokale Algorithmus gliedert sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt, dem elastischen Prädiktorschritt, wird zunächst ein Versuchsspannungszustand aus dem zulässigen Spannungszustand der letzten Gleichgewichtslösung und dem neuen, aus dem Newton-Raphson Verfahren erhaltenen Dehnungsincrement berechnet.

$$\sigma_{k+1}^{\text{trial}} = \sigma_k^* + D d\varepsilon_{k+1}^{\text{trial}} \quad (20)$$

mit:  $\sigma_{k+1}^{\text{trial}}$  Versuchsspannungszustand  
 $\sigma_k^*$  Spannungszustand der letzten Gleichgewichtslösung  
 $d\varepsilon_{k+1}^{\text{trial}}$  neues Dehnungsincrement

Verletzt dieser Versuchsspannungszustand die Fließbedingung

$$F(\sigma, \kappa) > 0, \quad (21)$$

so erfolgt im plastischen Korrektorschritt die Berechnung der plastischen Dehnungsincremente und die Rückführung des Versuchsspannungszustandes auf die Fließfläche. Dabei führt das Entstehen plastischer Dehnungen zu einer Ver- bzw. Entfestigung und damit zu einer Gestaltänderung der Fließfigur. Für den neuen gesuchten Zustand gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1}^* &= \sigma_k^* + D(d\varepsilon_{k+1}^{\text{trial}} - d\varepsilon_{k+1}^{\text{pl}}) \\ d\kappa_{k+1} &= d\kappa_{k+1}(d\varepsilon_{k+1}^{\text{pl}}) \\ F(\sigma_{k+1}, \kappa_{k+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Aus Gleichung (22) ergibt sich der unzulässige, zunächst vor dem Korrektorschritt im plastischen Bereich liegende Spannungsanteil zu

$$d\sigma_{k+1}^{\text{p}} = -D d\varepsilon_{k+1}^{\text{pl}}. \quad (23)$$

Durch Einsetzen der Fließregel (7) in (23) und Umstellung erhält man die Relaxationsgleichung

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = -D \frac{\partial Q(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma}. \quad (24)$$

Aus Gleichung (24) wird deutlich, dass der Pfad der lokalen Spannungsrelaxation von der Elastizitätsmatrix  $D$  und von den partiellen Ableitungen des plastischen Potentials abhängig ist. Für einfache Materialmodelle (z.B. für die isotrope von Mises Fließbedingung) kann bei Annahme eines ideal plastischen Materialverhaltens und der Verwendung einer assoziierten Fließregel der Returnpfad explizit berechnet werden. Für komplexere Materialmodelle gelingt die Berechnung der Spannungsrückführung auf die Fließfläche nur iterativ. Wesentliche Gründe hierfür sind die Abhängigkeit des plastischen Potentials vom Spannungszustand bei Verwendung von Modellen höherer Ordnung und der Einfluss der Ver- bzw. Entfestigung auf die Gestaltänderung der Fließfigur während des Relaxationsprozesses. Für die iterative Berechnung des gesuchten Spannungszustandes und der zugehörigen plastischen Variablen wird die Fließfunktion in der von Ortiz / Simo [9] vorgeschlagenen Weise linearisiert

$$F \approx F(\sigma_{k+1}^{(i)}, \kappa_{k+1}^{(i)}) + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\sigma_{k+1}^{(i)}, \kappa_{k+1}^{(i)}) \right\}^T \Delta \sigma_{k+1}^{(i)} + \frac{\partial F}{\partial \kappa}(\sigma_{k+1}^{(i)}, \kappa_{k+1}^{(i)}) \Delta \kappa_{k+1}^{(i)} = 0. \quad (25)$$

Mit

$$\Delta \sigma_{k+1}^{(i)} = \sigma_{k+1}^{(i+1)} - \sigma_{k+1}^{(i)} = \Delta \lambda \frac{\partial \sigma_{k+1}^{(i)}}{\partial \lambda} = -\Delta \lambda D \frac{\partial Q_{k+1}^{(i)}}{\partial \sigma} \quad (26)$$

$$\Delta \kappa_{k+1}^{(i)} = \kappa_{k+1}^{(i+1)} - \kappa_{k+1}^{(i)} = \Delta \lambda \frac{\partial \kappa_{k+1}^{(i)}}{\partial \lambda} \quad (27)$$

ergibt sich das plastische Multiplikatorinkrement durch einsetzen von (26) und (27) in (25) zu

$$\Delta \lambda = \frac{F_{k+1}^{(i)}}{\left\{ \frac{\partial F_{k+1}^{(i)}}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q_{k+1}^{(i)}}{\partial \sigma} - \frac{\partial F_{k+1}^{(i)}}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa_{k+1}^{(i)}}{\partial \lambda}} \quad (28)$$

Wird  $\Delta \lambda$  in Gleichung (26) und (27) durch (28) substituiert, erhält man den aktualisierten Zustand  $\sigma_{k+1}^{(i+1)}$  und  $\kappa_{k+1}^{(i+1)}$ . Die Iteration wird so lange wiederholt, bis der gesuchte Spannungszustand auf der Fließfläche ermittelt ist, so dass gilt:

$$F_{k+1}^{(i+1)} \leq \text{TOL}(F_{k+1}^0) \quad (29)$$

Zur Vermeidung numerischer Pfadabhängigkeiten werden die Statusvariablen  $\kappa$  nur in den Gleichgewichtszuständen der globalen Newton-Raphson Iteration aktualisiert [11], [8].

#### 4. Materialmodelle in Multiplas

Im Folgenden soll auf einzelne in Multiplas verfügbare Materialmodelle eingegangen werden.

##### 4.1 Fließbedingung nach Tresca, MOHR-COULOMB - isotrop

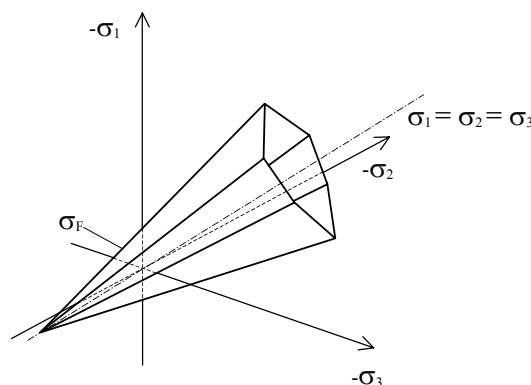


Fig.3: Fließbedingung nach MOHR-COULOMB isotrop

Die Fließbedingung lautet: 
$$F = \sigma_m \sin \varphi + \sigma_s \left( \cos \Theta - \frac{\sin \Theta \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \varphi \quad (30)$$

mit: 
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad \sigma_s = \sqrt{I_2} \quad \sin(3 \Theta) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3}{I_2^{3/2}}$$

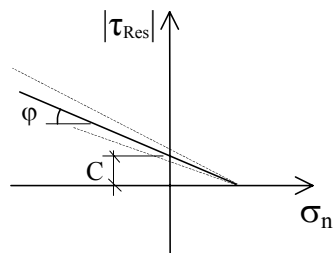
$\sigma_m$  hydrostatische Spannung  
 $I_2, I_3$  zweite, dritte Invariante der deviatorischen Hauptspannungen,  $\Theta$  Lode-Winkel  
 $\varphi$  – innerer Reibungswinkel bzw.  $\psi$  – Dilatanzwinkel,  $c$  – Kohäsion

Alle Mohr-Coulomb Modelle lassen sich mit einer Zugspannungsbegrenzung kombinieren. Durch die Wahl des Reibungswinkels  $\varphi = 0$  wird die Tresca-Fließbedingung generiert. Restfestigkeiten können verarbeitet werden. Der Abfall der Festigkeiten wird nach Überschreiten der Bruchfestigkeiten initiiert.



## 4.2 Fließbedingung nach MOHR-COULOMB, anisotrop

Bei der Berechnung von Trennflächen bzw. Scherfugen ist die Lage der Bruchfläche von der Lage der jeweiligen Trennfläche abhängig. Es gilt:



**Fig.4:** Fließbedingung nach MOHR-COULOMB anisotrop

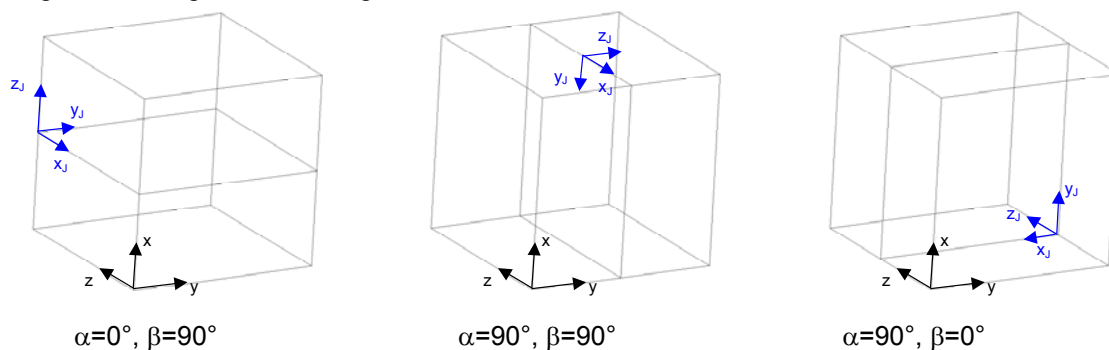
Die Fließbedingung lautet:  $|\tau_{Res}| - \sigma_n \cdot \tan\varphi - C = 0$  (31)

mit:  $\tau_{Res}$  – normal auf die Bruchfläche wirkende Scherspannung  
 $\sigma_n$  – in der Bruchfläche wirkende Scherspannung  
 $\varphi$  – Reibungswinkel (phi) bzw.  $\psi$  – Dilatanzwinkel,  $c$  – Kohäsion

Mit den beiden Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  wird die Lage der Trennfläche beschrieben. Es gilt

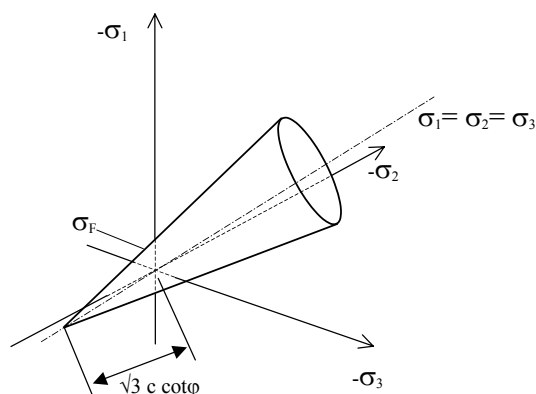
1.  $\alpha$  - Drehung entgegen positiven Drehsinn um die z-Achse
2.  $\beta$  - Drehung im positiven Drehsinn um die y-Achse

Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  können beliebig im Raum definiert werden. In Fig.5 sind exemplarisch für drei orthogonale Konfigurationen dargestellt.



**Fig.5:** Beispiele zur Winkeldefinition von Trennflächenebenen

## 4.3 Fließbedingung nach Mises, DRUCKER-PRAGER



**Fig.6:** Fließbedingung nach DRUCKER/PRAGER

Die Drucker-Prager Fließbedingung lautet:  $F = \sigma_s + \beta \sigma_m - \tilde{\sigma}_{yt}$  (32)

Das plastische Potential lautet:  $Q = \sigma_s + \beta \delta \sigma_m$  (33)

mit  $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$   $\sigma_s = \sqrt{I_2}$  ( $I_2$  2. Invariante der deviatorischen Hauptspannungen)

$\delta$  Dilatanzfaktor

Die beiden Materialparameter  $c$  und  $\varphi$  sind entsprechend Gl. (34) in  $\beta$  und  $\tilde{\sigma}_{yt}$  enthalten. Anders als bei der Standard-ANSYS Drucker-Prager Fließbedingung werden in Multiplas nicht  $c$  und  $\varphi$  sondern direkt  $\beta$  und  $\tilde{\sigma}_{yt}$  als Materialparameter vorgegeben. Mit dieser in der Materialbibliothek Multiplas gewählten Formulierung lässt sich Sand mit exakt  $c=0$  in der Praxis sehr gut berechnen [5]. Durch die Wahl von  $\beta = 0$  kann die Mises Fließbedingung generiert werden.

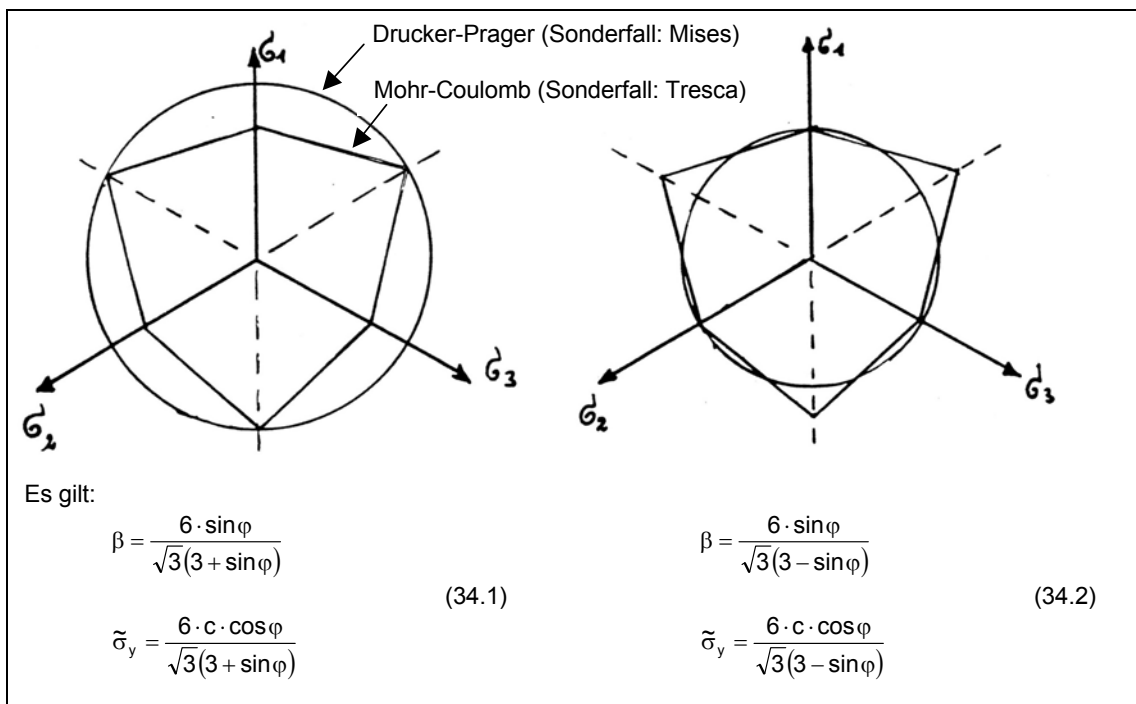
Mit Hilfe des Dilatanzfaktors  $\delta$  ist es möglich, das plastische Verformungsverhalten durch eine nichtassozierte Fließregel zu steuern. Im Zugbereich der Drucker-Prager Fließbedingung wird die Formulierung einer nichtassozierten Fließregel mit einem Dilatanzfaktor von

$$\delta = 0,1 \dots 0,25$$

empfohlen. Sie stellt sicher, dass unter reiner, einaxialer Zugbeanspruchung keine physikalisch unzutreffenden positiven Querdehnungen auftreten. Bei vorwiegender Schubbelastung kann der Dilatanzfaktor  $\delta$  z.B. mit Hilfe des Reibungswinkels  $\varphi$  und Dilatanzwinkels  $\psi$  aus dem Verhältnis der Beta-Werte gem. Gleichung (34.1) oder (34.2) ermittelt werden. Zum Beispiel ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (34.1):

$$\beta(\varphi) = \frac{6 \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)} \quad \beta(\psi) = \frac{6 \cdot \sin \psi}{\sqrt{3}(3 + \sin \psi)} \quad \delta = \frac{\beta(\varphi)}{\beta(\psi)}$$

Näherungsweise kann mit Hilfe des Drucker-Pragers die Mohr-Coulomb Versagensbedingung entsprechend Fig.7 als umschreibender Kegel oder einbeschriebener Kegel angenähert werden. Ebenso sind mit der Materialbibliothek Multiplas beliebige Zwischenwerte oder ein Verschneiden mit der Mohr-Coulomb Versagensbedingung möglich.



**Fig.7:** Drucker-Prager Versagensbedingung als umschreibender Kegel (links) oder einbeschriebener Kegel (rechts)

#### 4.4 Konvergenzverbesserung durch Kombination der Fließbedingungen nach Tresca und Mises

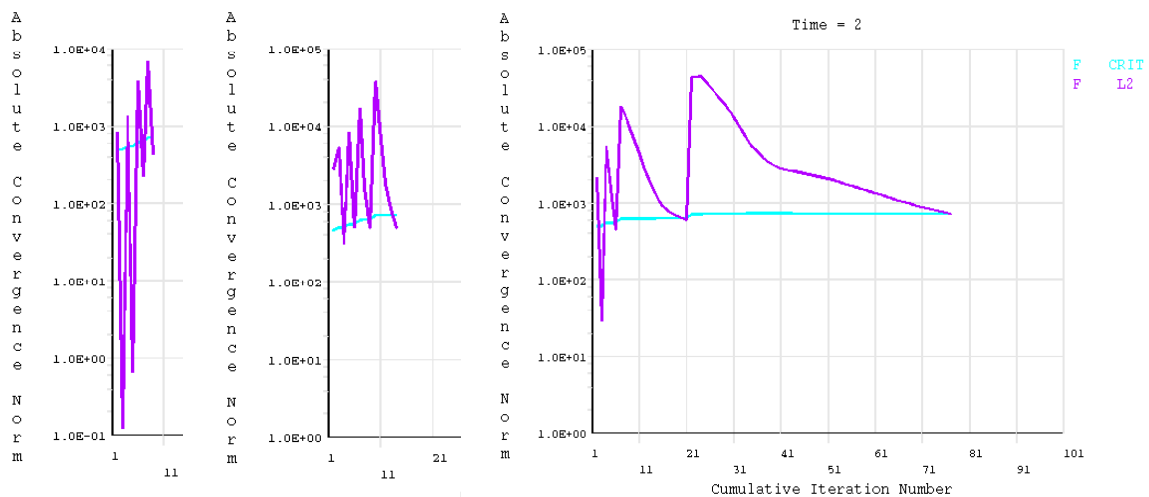
Wie aus Fig.7 deutlich wird, unterscheiden sich die durch die MOHR-COULOMB-Fließbedingung und durch die DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung eingeschlossenen Bereiche zulässiger Spannungen (elastischer Spannungsbereich). Der Unterschied der von der Fließfläche eingeschlossenen Fläche in der Deviatorschnittebene beträgt dabei ca. 15 %.

Bei einigen Problemstellungen kann es erforderlich sein, den elastischen Spannungsbereich auf das von der MOHR-COULOMB bzw. Tresca Fließbedingung vorgegebene Maß zu beschränken. Ein Beispiel hierfür ist der Nachweis von Stahlstrukturen [4] bei denen das durch Tresca vorgegebene Spannungsniveau nicht überschritten werden soll. Ein anderes Beispiel ist die Erddruckberechnung in der Geotechnik, bei der nur die Mohr-Coulomb Fließbedingung mit den Grundlagen der Erddrucktheorie übereinstimmt.

Grundsätzlich weisen Tresca bzw. Mohr-Coulomb durch ihre mehrflächigen Fließflächen ein deutlich schlechteres Konvergenzverhalten auf als die in der Deviatorebene stetigen Fließflächen Mises bzw. Drucker-Prager.

Die Kombination von Tresca mit Mises gem. Gl. (34.1) führt zu einer wesentlichen Konvergenzverbesserung der Berechnung bei Einhaltung des von Tresca begrenzten Spannungsniveaus. Diese Kombination ist deshalb für entsprechende Stahlbaunachweise sehr von Vorteil. In Fig. 8 ist für einen Benchmarktest das Konvergenzverhalten der Netwon-Raphson Iteration für die drei Fälle Mises, Kombination Mises / Tresca und Tresca verglichen.

ANSYS



**Fig.8:** Benchmark: Konvergenzverhalten des Newton-Raphson Verfahrens;  
Links: Mises (9 Iterationen), Mitte: Kombination Mises+Tresca (14 Iterationen),  
Rechts: Tresca (74 Iterationen)

In ausgewählten Fällen (in denen z.B. der MOHR-COULOMB allein zu einer sehr schlechten Konvergenz oder Divergenz führt) kann es auch sinnvoll sein, durch die Kombination der Fließbedingung nach MOHR-COULOMB und DRUCKER-PRAGER die numerische Berechnung zu stabilisieren. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass diese Kombination aus MOHR-COULOMB und DRUCKER-PRAGER lediglich aus Gründen der numerischen Stabilisierung und Konvergenzverbesserung sinnvoll ist und zwangsläufig zu Ergebnisabweichungen gegenüber der alleinigen Anwendung der Fließbedingung nach MOHR-COULOMB führt, da die Spannungsrückführungen (Return-Mapping) auf die Fließbedingung nach MOHR-COULOMB und DRUCKER-PRAGER nicht exakt gleichgerichtet sind. Die Zulässigkeit dieser Ergebnisabweichungen ist daher im Einzelfall zu überprüfen.

#### 4.5 Betonmodell

Auf Grund ihrer Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen sind Drucker-Prager-Fließbedingungen zur Beschreibung der Betonfestigkeit gut geeignet [12]. Im vorliegenden Materialmodell wird für als Versagensbedingung für Beton eine von Hintze [13] vorgeschlagene,

singuläre Drucker-Prager Fließbedingung verwendet. Sie besteht aus zwei Fließkriterien (Gl. (5), (6)), wodurch die Betonfestigkeit sowohl im Druck- als auch im Zugbereich realitätsnah beschrieben werden kann.

$$F_1 = \sigma_s + \beta_t \sigma_m - \tilde{\sigma}_{yt} \Omega_1 \quad (35)$$

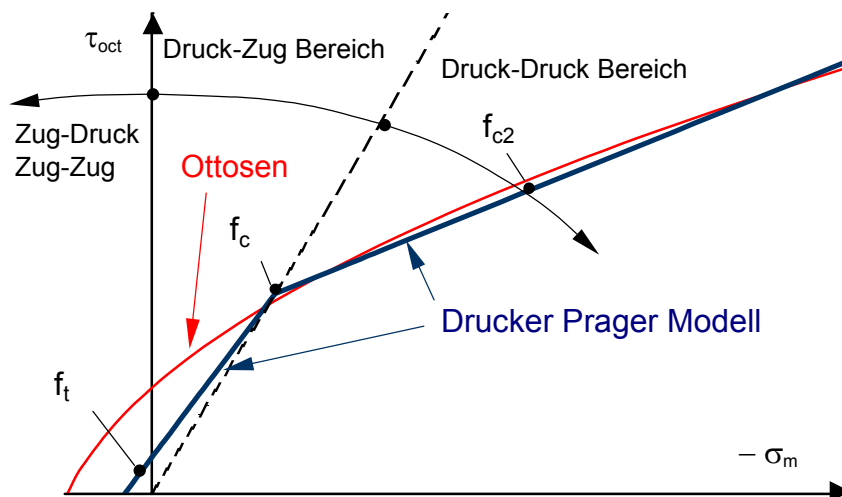
$$\beta_t = \frac{\sqrt{3} (f_c - f_t)}{f_c + f_t} \quad \tilde{\sigma}_{yt} = \frac{2f_c f_t}{\sqrt{3} (f_c + f_t)}$$

$$F_2 = \sigma_s + \beta_c \sigma_m - \tilde{\sigma}_{yc} \Omega_2 \quad (36)$$

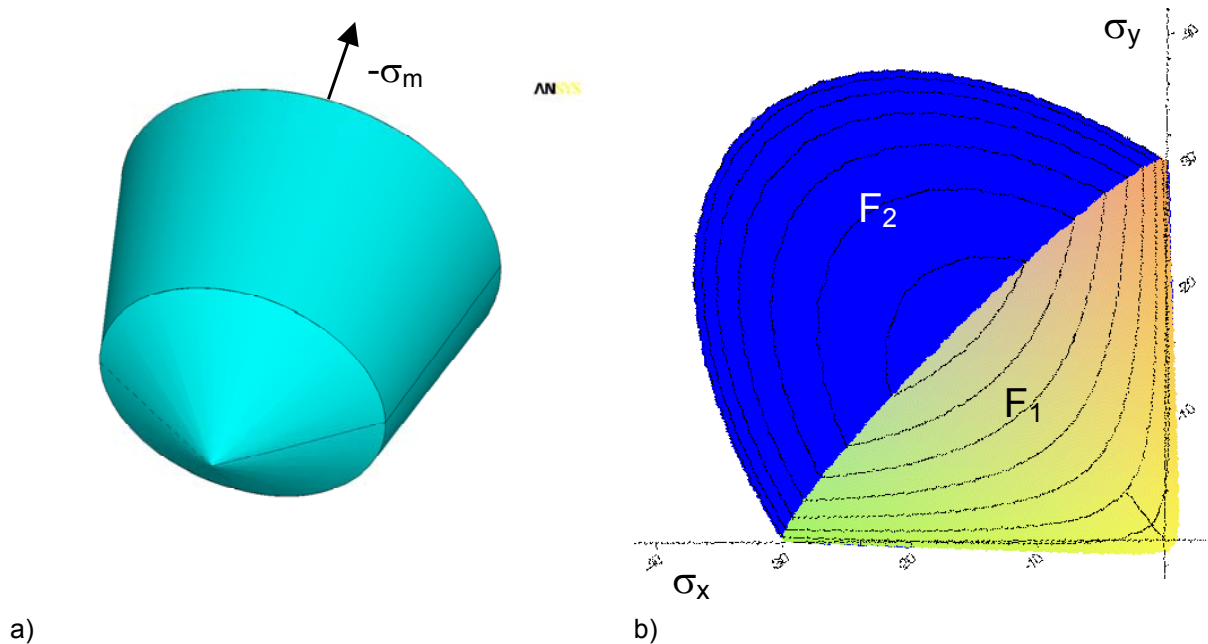
$$\beta_c = \frac{\sqrt{3} (f_{c2} - f_c)}{2f_{c2} - f_c} \quad \tilde{\sigma}_{yc} = \frac{f_{c2} f_c}{\sqrt{3} (2f_{c2} - f_c)}$$

mit:  $f_t$  einachsige Zugfestigkeit  
 $f_c$  einachsige Druckfestigkeit  
 $f_{c2}$  zweiachsige Druckfestigkeit  
 $\Omega$  Ver- und Entfestigungsfunktion  
(im Druckbereich  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_c$ , im Zugbereich  $\Omega_1 = \Omega_t$ ).

Die Fließbedingung ist in Fig.9 und Fig.10 in verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt. Der in Fig.9 dargestellte Vergleich mit dem Bruchmodell von Ottosen zeigt die Vorzüge des aus zwei Fließkriterien bestehenden Drucker-Prager Modells. Während im Bereich des Druckmeridians eine sehr gute Übereinstimmung herrscht, lässt sich das gewählte Drucker-Prager Modell im Druck-Zug und Zugbereich an die realistische Zugfestigkeit anpassen, wohingegen das geschlossene Ottosen-Modell diese Bereiche deutlich überschätzt. Ein weiterer Vorteil liegt in der Beschreibung der Fließbedingung mit den drei einfach bestimmmbaren, bzw. i.d.R. bekannten Parametern  $f_t$ ,  $f_c$  und  $f_{c2}$ .



**Fig.9:** Singuläre Drucker-Prager Fließbedingung - Darstellung im Oktaeder-System

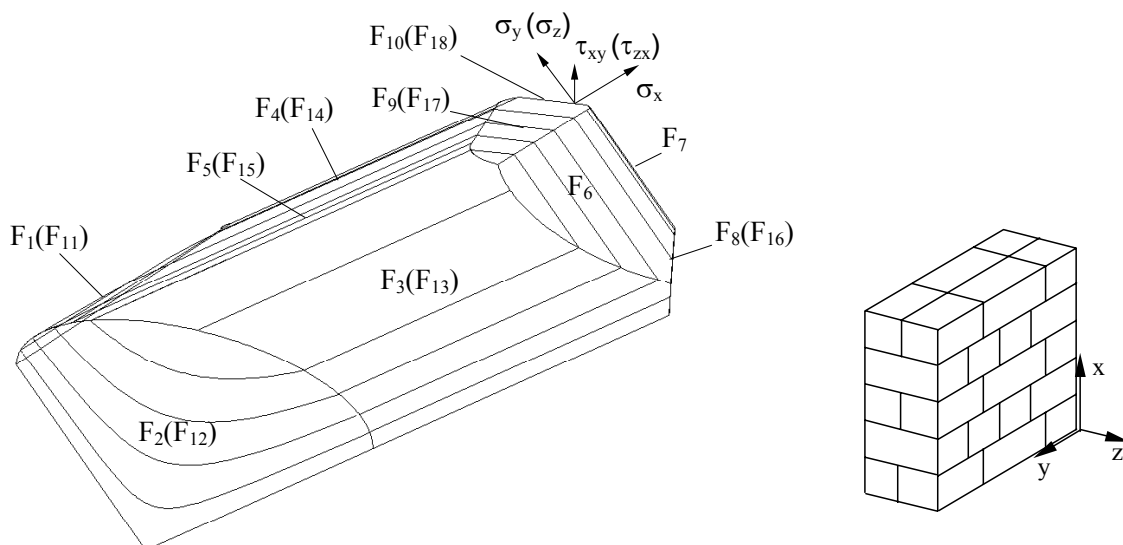


**Fig.10:** Singuläre Drucker-Prager Fließbedingung;  
 a) räumliche Darstellung im Hauptspannungsraum; b) Darstellung im  $\sigma_x$ - $\sigma_y$ - $\tau_{xy}$ -Raum

Das Materialmodell erfüllt alle Anforderungen aktueller Normen auf Grundlage der Modellangaben und Materialparameter des CEB-FIP Modelcodes 90. Damit ist es möglich, entsprechend der seit 1.1.2005 inkraft getretenen DIN 1045-1 Beton-, Leichtbeton- und Stahlbetonstrukturen sowie vorgespannte Konstruktionen sowohl bezüglich ihrer Tragfähigkeit als auch ihrer Gebrauchstauglichkeit unter realitätsnaher Einbeziehung geometrisch und materiell nichtlinearen Verhaltens nachzuweisen. Eine ausführliche Dokumentation des gesamten Materialmodells und dessen Verifikation an Versuchsergebnissen ist in [3] enthalten und soll deshalb hier nicht wiederholt werden.

#### 4.6 Materialmodell für Mauerwerk

Für die Beschreibung der orthotropen Festigkeit regelmäßiger Mauerwerkverbände wurde ein erweitertes, räumliches Mauerwerksmaterialmodell mit einer Fließbedingung nach Ganz [14] verwendet. Diese Fließbedingung bildet die Grundlage der Schweizer Mauerwerksnorm SIA 177/2 und stimmt mit dem in DIN 1053 enthaltenen Bruchmodell von Mann [15] sowie dem für Natursteinmauerwerk vorgeschlagenen Modell von Berndt [16] sehr gut überein.



**Fig. 11:** Materialmodell für regelmäßiges Mauerwerk [11]

Im verwendeten Materialmodell wird darüber hinaus auch die Interaktion mit einer horizontalen Beanspruchung (parallel zur Lagerfuge) berücksichtigt. Die erforderlichen Materialparameter dieses Modells sind die Druck- und Zugfestigkeiten des Mauerwerks, der Reibungswinkel und die Kohäsion zwischen Stein und Fuge sowie die Steinabmessungen. Die verwendete Fließbedingung (Fig. 11) setzt sich aus einzelnen Bruchkriterien (Fließkriterien) zusammen, die die einzelnen Versagensmechanismen eines regelmäßigen Mauerwerkverbandes abbilden. Das orthotrope, nichtlineare Spannungs-Dehnungsverhalten von Mauerwerk wird über entsprechende Softening- und Hardeningmodelle [11] beschrieben.

Eine ausführliche Dokumentation des gesamten Materialmodells und dessen Verifikation an Versuchsergebnissen ist in [11] enthalten und soll deshalb hier nicht wiederholt werden.

## 5. References

- [1] Schlegel, R.; Auberg, R.; Strauß, J.; Krämer, W.: Moderne Verfahren zur realitätsnahen Bewertung der Standsicherheit der historischen Mauerwerkfassaden des Römischen Hofes in Berlin - Unter den Linden. 24. CAD-FEM USER'S MEETING, Int. FEM-Technologietage 25.-27. Oktober 2006, Stuttgart
- [2] Schlegel, R.; Will, J.: Realitätsnahe Berechnung der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit historischer Bogenbrücken. 24. CAD-FEM USER'S MEETING, Int. FEM-Technologietage 25.-27. Oktober 2006, Stuttgart
- [3] Schlegel, R.: Nichtlineare Berechnung von Beton und Stahlbetonstrukturen nach DIN 1045-1 mit ANSYS – Entwicklung, Implementation und Anwendung eines neuen Materialmodells. 23. CAD-FEM USER'S MEETING, Int. FEM-Technologietage 9.-11. November 2005, Bonn
- [4] Rauscher, F.: Comparison of the results of the Design Check against Global Plastic Deformation (GPD-DC) according to prEN13445-3 Annex B using Tresca's and Mises' yield condition. 19th CAD-FEM USER'S MEETING, Int. Congress of FEM Technology 17.-19. October 2001, Berlin, Potsdam
- [5] Wallisch, W.; Schlegel, R.: Numerische Simulation rohrförmiger Tragwerke im Boden mit ANSYS-Multiplas. 24. CAD-FEM USER'S MEETING, Int. FEM-Technologietage 25.-27. Oktober 2006, Stuttgart
- [6] Will, J.; Müller, U.: Nachweis von Stauanlagen nach E-DIN 19700 mit ANSYS. 20th CAD-FEM Users' Meeting 2002, International Congress on FEM Technology, Friedrichshafen, October 9-11, 2002
- [7] Simo J. C.; Kennedy J. G.; Govindjee S.: Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.26, S. 2161 - 2185 (1988)
- [8] Will, J.: Beitrag zur Standsicherheitsberechnung im geklüfteten Fels in der Kontinuums- und Diskontinuumsmechanik unter Verwendung impliziter und expliziter Berechnungsstrategien: Bauhaus Universität Weimar, Dissertation 1999, Berichte Institut für Strukturmechanik 2/99
- [9] Simo, J.C.; Ortiz, M.: An analysis of new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.23, S.353-366 (1986)
- [10] Simo J.C. , Taylor R.L.: Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. Computer Meth. in Applied Mechanics and Engineering 48, S. 101-118 (1985)
- [11] Schlegel, R.: Numerische Berechnung von Mauerwerkstrukturen in homogenen und diskreten Modellierungsstrategien. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, Universitätsverlag (2004) ISBN 3-86068-243-1; Internet: [http://e-pub.uni-weimar.de//frontdoor.php?source\\_opus=236](http://e-pub.uni-weimar.de//frontdoor.php?source_opus=236)
- [12] Chen, W.F.: Constitutive Equations for Engineering Materials. Vol. 2 Plasticity and Modeling. Elsevier Amsterdam - London - New York - Tokyo, (1994)
- [13] Hintze, D.: Zur Beschreibung des physikalisch nichtlinearen Betonverhaltens bei mehrachsigen Spannungszustand mit Hilfe differentieller Stoffgesetze unter Anwendung der Methode der finiten Elemente. Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Dissertation (1986)
- [14] Ganz, H.R.: Mauerwerkscheiben unter Normalkraft und Schub. ETH Zürich, Institut für Baustatik und Konstruktion. Dissertation. Birkhäuser Verlag Basel (1985)
- [15] Mann, W.; Müller, H.: Schubtragfähigkeit von gemauerten Wänden und Voraussetzungen für das Entfallen des Windnachweises. Berlin: Ernst u. Sohn. In: Mauerwerk-Kalender (1985)
- [16] Berndt, E.: Zur Druck- und Schubfestigkeit von Mauerwerk – experimentell nachgewiesen an Strukturen aus Elbsandstein. Bautechnik 73, S. 222-234 Ernst & Sohn, Berlin (1996)