

# Anwendung effizienter Methoden der Sensitivitätsanalyse zur Untersuchung komplexer Ingenieuraufgaben

Virtuelle Berechnungsmethoden haben in den letzten beiden Jahrzehnten einen stark ansteigenden Anteil im Entwurfsprozess von Strukturen und Systemen eingenommen. Numerische Berechnungsverfahren, wie z. B. die Finite-Elemente-Methode, sind für den Einsatz für komplexe Problemstellungen mittlerweile sehr weit entwickelt worden. Die dadurch verfügbaren numerischen Analysemodelle bieten nun die Möglichkeit, automatisierte mathematische Optimierungsverfahren zur verbesserten Auslastung sowie stochastische Methoden zu detaillierten Sicherheitsbetrachtungen in den virtuellen Entwicklungsprozess einfließen zu lassen. Für beide Vorgehensweisen hat sich eine Betrachtung der Wichtigkeit von Eingangsgrößen in Bezug auf relevante Antwortgrößen, die sogenannte Sensitivitätsanalyse, als sehr sinnvoll erwiesen. In dem vorliegenden Artikel wird eine effiziente Methodik zur globalen varianzbasierten Sensitivitätsanalyse vorgestellt. Diese Vorgehensweise nähert die Antwortgrößen mit Hilfe von Ersatzfunktionen an. Im Gegensatz zu existierenden Verfahren wird dabei nicht ausschließlich die Repräsentation der Stützpunktdaten, sondern die Prognosefähigkeit neuer, unbekannter Bereiche bewertet. Anhand dieser Qualitätsbetrachtungen gelingt es sehr zuverlässig, wichtige Eingangsparameter zu identifizieren. Das Ersatzmodell wird dann ausschließlich mit diesen Variablen aufgebaut, wodurch ein Einsatz auch für komplexere Modelle mit vielen Eingangsparametern ermöglicht wird. Anhand zweier praktischer Anwendungsbeispiele wird der Mehrwert dieser Vorgehensweise aufgezeigt.

**Keywords:** Sensitivität; Ersatzmodell; Optimierung; Analyse, stochastische

**Application of efficient methods for sensitivity analysis to complex engineering tasks.** *In the last two decades virtual simulation methods have become more and more important in the development process of structures and systems. Numerical methods such as the Finite Element Method have been improved to be applicable for complex engineering tasks. Today, numerical models offer the opportunity for automatized mathematical optimization to improve the performance of a design and stochastic evaluations which enable detailed safety assessment. For both fields the identification of important input variables with respect to relevant response quantities is very helpful. In the present paper an efficient method for global variance based sensitivity analysis is presented. Within this method, meta-models are used to approximate the response variables based on a relatively small set of support points. Based on prediction analyses instead of state-of-the-art goddess-of-fit methods, the presented method identifies important input variables, which have to be considered within the approximation models. With this automatic variable reduction procedure the presented approximation method can be applied*

*for complex simulation models with many input parameters. By means of two application examples, the advantages of the presented method are shown.*

**Keywords:** sensitivity, meta-model, optimization, stochastic analysis

## 1 Einleitung

Sensitivitätsanalysen sind dazu geeignet, Unsicherheiten in Modellantwortgrößen den Modelleingangsgrößen zuzuweisen. Innerhalb einer Robustheitsanalyse mittels virtueller Modelle können mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse im Falle nichtrobusten Verhaltens des untersuchten Systems die maßgeblich verantwortlichen Eingangsgrößen identifiziert und entsprechende Maßnahmen sinnvoll eingeleitet werden. Alternativ zur Anwendung innerhalb der Robustheitsanalyse ist eine Sensitivitätsanalyse sinnvoll, um für eine Optimierungsfragestellung wichtige Designvariablen zu identifizieren und Mechanismen und Zusammenhänge zu erkennen. Eine Reduktion der Anzahl der zu untersuchenden Designvariablen auf wichtige Größen ermöglicht meist eine weitaus effizientere Lösung des Optimierungsproblems.

## 2 Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse

Bei der globalen Sensitivitätsanalyse wird der Einfluss der Modelleingangsgrößen auf die Modellantwortgrößen in einem bestimmten Bereich untersucht. Bei stochastischen Variablen wären das die Bereiche, die durch die Verteilungen vorgegeben sind, und bei Optimierungsvariablen entsprechen diese dem Designraum, der durch die unteren und oberen Schranken definiert ist. Bei der globalen varianzbasierten Sensitivitätsanalyse wird nun nicht der Einfluss an einem lokalen Entwicklungspunkt untersucht, sondern die Variation der Antwortgrößen wird der Variation der Eingangsvariablen zugeordnet [1]. Dabei wird zwischen Effekten erster Ordnung, welche den Einfluss einer Eingangsgröße allein beschreiben, und Effekten höherer Ordnung unterschieden, welche die Interaktionen zwischen den Eingangsgrößen darstellen. Für praktische Anwendungen sind allerdings existierende varianzbasierte Maße entweder nicht ausreichend genau (z. B. Korrelationskoeffizienten bilden nur eindimensionale Zusammenhänge ab) oder sind hinsichtlich der Zahl der Modellauswertungen zu aufwendig (Sobol Indizes [2] können beliebige Zusammen-

hänge abbilden, benötigen aber mehrere tausend Modellaufrufe). Aus diesem Grund hat die Dynardo GmbH ein Konzept entwickelt, um für komplexe Aufgabenstellungen mit vielen Eingangsvariablen die Variablenwichtigkeiten mit möglichst wenig Modellaufrufen zu berechnen.

### 3 Metamodell Optimaler Prognose (MOP)

Bei dem Metamodell Optimaler Prognosefähigkeit werden die untersuchten Modellantwortgrößen durch eine Approximationsfunktion ersetzt. Ein etabliertes Vorgehen dafür stellt die Antwortflächenmethode dar, bei der generell polynomiale Approximationsfunktionen verwendet werden. Die Approximationsqualität wird bei Polynomen in der Regel mit dem Bestimmtheitsmaß abgeschätzt (Coefficient of Determination – CoD). Allerdings ist dieses Maß für eine geringe Zahl von Stützstellen oder mit steigendem Polynomansatz viel zu optimistisch, wie Bild 1 zeigt. Weiterhin ist das Bestimmtheitsmaß nur für Polynome anwendbar, was den Einsatz komplexerer, aber eventuell genauerer Approximationsmethoden erschwert.

Zur objektiven Bewertung der Approximationsqualität von Metamodellen hat die Dynardo GmbH den Koeffizient der Prognosefähigkeit (Coefficient of Prognosis – CoP) ein-

geführt [3]. Dieser schätzt auf Basis von Kreuzvalidierungen die durch das Metamodell erklärbare Varianz ab. In Bild 2 ist dargestellt, wie sich der CoP für eine Moving Least Squares Approximation (MLS) [4] verhält. Dabei wird das erwartete Verhalten, dass wenige Stützstellen auch eine schlechtere Approximationsqualität hervorruft, auch abgebildet. Weiterhin zeigt das Bild, dass das lokale angepasste MLS-Verfahren mit steigender Stützstellenanzahl den Funktionsverlauf immer besser reproduzieren kann. Werden in dem Approximationsmodell nun noch die beiden unwichtigen Variablen entfernt, erhöht sich die Approximationsqualität signifikant. Das bedeutet, dass die Identifikation der wichtigen Variablen für ein komplexes Modell die Anwendbarkeit von Metamodellen deutlich verbessert und oftmals erst ermöglicht. Innerhalb der Prozedur zur Generation des MOP werden nun verschiedene Metamodelltypen mit verschiedenen Variablenkombinationen analysiert. Das optimale Metamodell in Kombination mit der optimalen Variablenkombination liefert dann den maximalen CoP (s, Bild 2).

Vergleicht man nun die Approximationsqualität des MOP für eine steigende Dimension mit anderen üblichen Approximationsmethoden wie Kriging, Support Vector Regression (SVR) oder auch neuronalen Netzwerken (ANN), so stellt man fest, dass nicht die immer komplexere Appro-

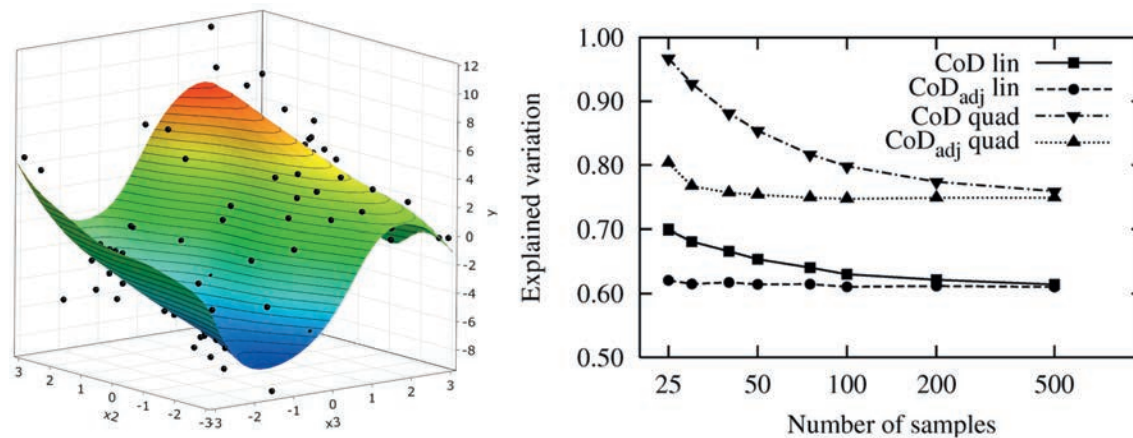


Bild 1. Analytische nichtlineare Funktion (links) mit drei wichtigen und zwei unwichtigen Eingangsvariablen und Bewertung der Qualität der Polynomapproximation (rechts) in Abhängigkeit der Stützstellenanzahl mit Hilfe des Coefficient of Determination (CoD)

Fig. 1. Analytical nonlinear function (left) with three important and two unimportant input variables and its assessment of the approximation quality of polynomial model (right) depending on the number of support points by using the Coefficient of Determination (CoD)

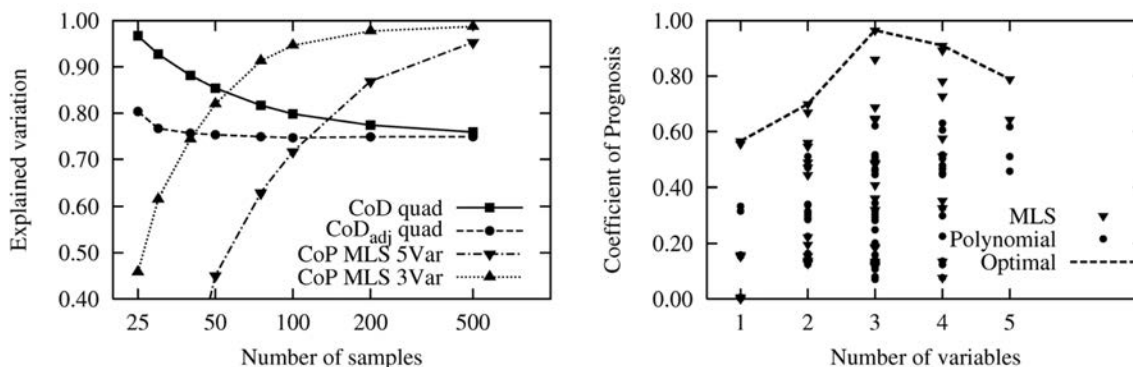


Bild 2. Konvergenz des Coefficient of Prognosis (CoP) für die MLS-Approximation der analytischen Funktion (links) und CoP in Abhängigkeit des Approximationsmodells und der Variablenkombinationen (rechts)

Fig. 2. Convergence of the Coefficient of Prognosis (CoP) of an MLS approximation of the analytical function (left) and the CoP depending on the approximation model and the input variable combinations (right)

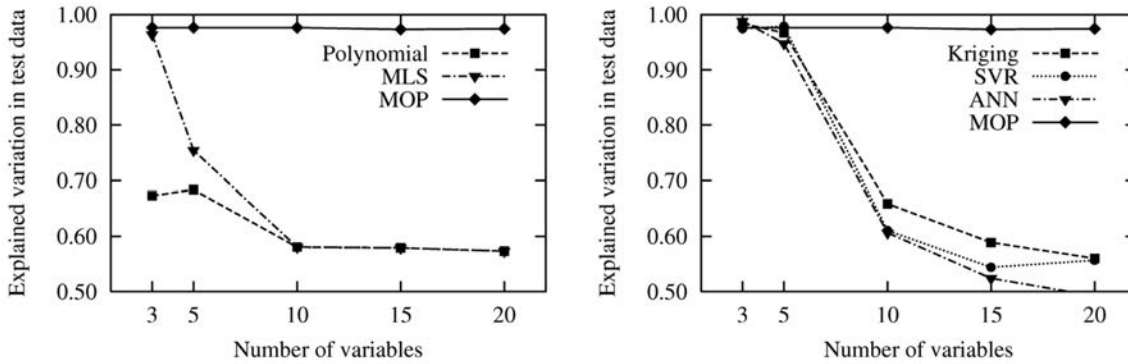


Bild 3. Vergleich der Approximationsqualität des MOP mit anderen Approximationsverfahren für die analytische Funktion unter Erhöhung der Dimension (Variablen ohne Einfluss werden hinzugefügt)

Fig. 3. Comparison of the approximation quality of the MOP and other approximation methods by means of the analytical function with increasing dimension (dummy variables are added to the approximation model)

ximationsmethodik sondern die sinnvolle Reduktion des Variablenraumes die Analyse hochdimensionaler Probleme ermöglicht (Bild 3).

Unter Verwendung der gefundenen optimalen Approximation im optimalen Variablen-subraum werden schlussendlich die Wichtigkeiten der Eingangsvariablen mit Sobol-Indizes abgeschätzt. Die Gesamtqualität des MOP gegeben durch den CoP gibt nun einen Hinweis auf die nicht erklärbare Varianz und liefert Indizien für mögliche numerische Ungenauigkeiten im Modell, auch Solverrauschen genannt, oder stark nichtlineare Effekte.

#### 4 Anwendungen

##### 4.1 Optimierung einer Dachkonstruktion

In dem ersten Anwendungsbeispiel wurde eine Dachkonstruktion in zwei Ausführungsvarianten (Bild 4) hinsichtlich wichtiger Einflussgrößen untersucht. Dabei sollte das Design der Dachkonstruktion flächendeckend für den Bereich Deutschland gestaltet werden, sodass für jeden beliebigen Standort eine optimale Konstruktionsvariante mit genau definierter Abmessung vorgelegt werden kann. Einzig die Grundform als freistehendes Pultdach aus Stahlprofilen war vorgegeben.

Um die optimale Dachkonstruktion mit Hilfe einer Formoptimierung für jede Region zu bestimmen, war es sinnvoll, zunächst verschiedene Dachvarianten zu entwi-

ckeln, um die jeweils beste Lösung des Optimierungsproblems zu finden. Die Variantenuntersuchung umfasste dabei zwei Pultdachkonstruktionen (s. Bild 4). Während im Dachmodell A die Dachplatten auf zwei Randpfetten aufgelagert wurden, wurde im Dachmodell B für die Lagerung noch eine zusätzliche Mittelpfette angebracht. Alle Pfetten (I-Profil) wurden wiederum von einem darunterliegenden Sparren (U-Profil) getragen. Der Sparren war biegesteif mit einer Stütze (I-Profil) im Modell A bzw. mit zwei Stützen (I-Profil) im Modell B verbunden. Die beiden Pultdachkonstruktionen wurden in ANSYS als parametrische FE-Modelle (ohne die Dachplatten) modelliert. Als variable Eingangsgrößen dienten dazu Geometrieparameter wie Sparrenlänge, Stützenabstand in Querrichtung, Dachneigungswinkel, Stützenhöhe, Pfettenlänge und die Anzahl der Dachfelder. Des Weiteren wurden die Materialeigenschaften der Stahlprofile als diskrete Parameter sowie die Standortparameter Geländehöhe, Schnee- und Windlastzone definiert.

Als Optimierungsziel wurde die Minimierung der Gesamtmasse der Konstruktion gewählt. Neben dem Ziel der Materialreduzierung mussten die Dachkonstruktionen auch auf eine statisch ausreichende Tragfähigkeit, nach den geltenden Normen, nachgewiesen werden. Dabei wurden in der Bemessung die regional gegebenen Lasten aus Schnee- und Windlast sowie das Eigengewicht der Konstruktion berücksichtigt. Die linear elastische Nachweisführung der einzelnen Profile und auch des gesamten Systems wurde in

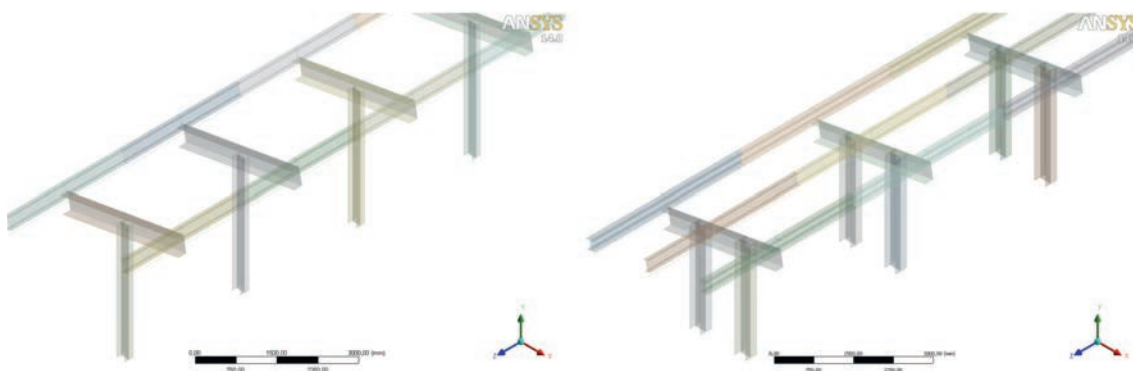


Bild 4. FEM-Modell der untersuchten Dachkonstruktionen mit zwei Dachpfetten (links, Variante A) und drei Dachpfetten (rechts, Variante B)

Fig. 4. FEM model of the investigated roof structure with two stringers (left, variant A) and with three stringers (right, variant B)



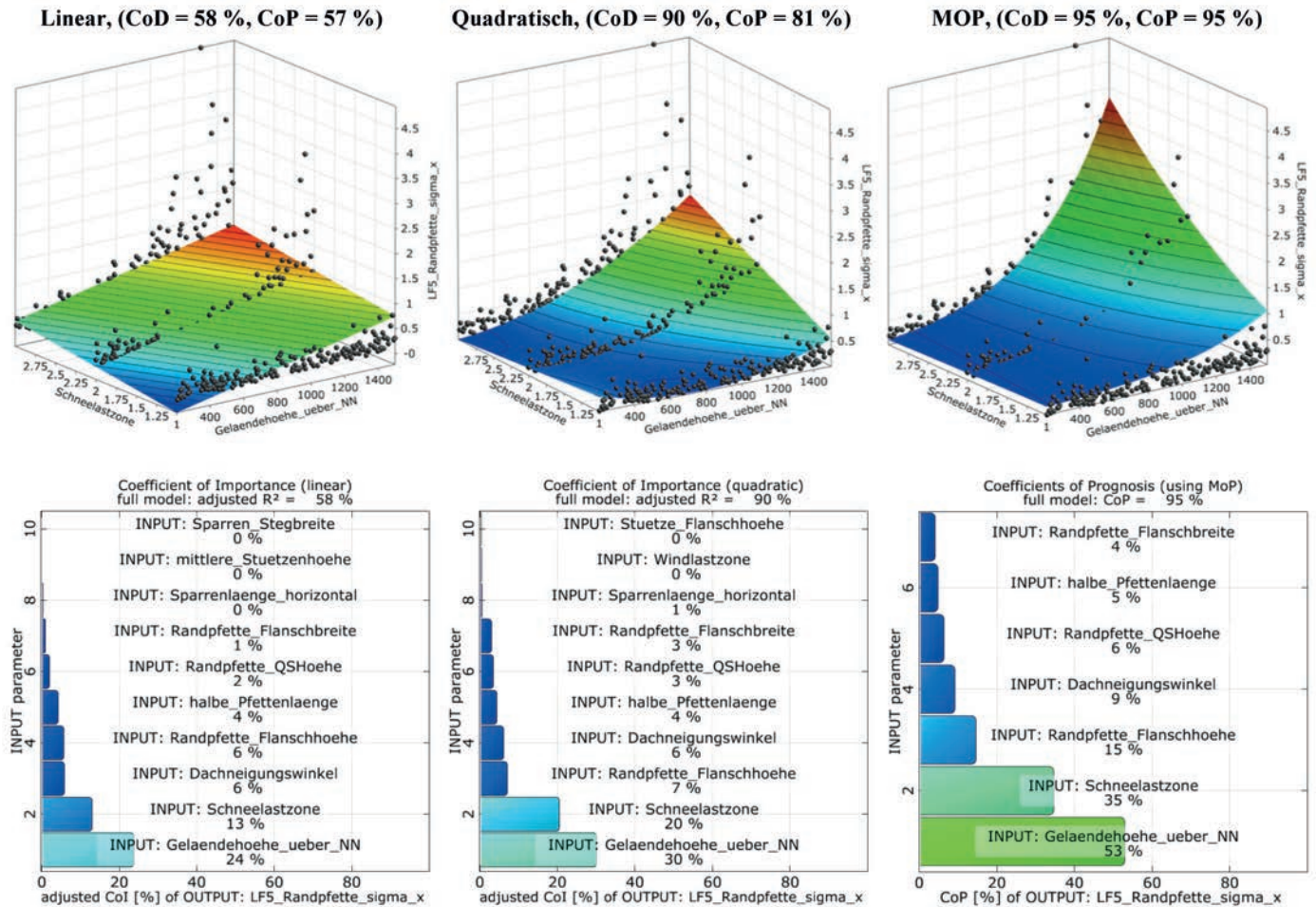


Bild 5. Normalspannung der Randpfette in Modell A: Approximation mit linearer und quadratischem Polynom sowie mit dem MOP (oben: 3D-Subraumplot, unten: auf Basis des Approximationsmodells ermittelte Einzelwichtigkeiten der Eingangsvariablen)

Fig. 5. Normal stress of the outer stringer in model A: Approximation using a linear and quadratic polynomial as well as the MOP (top: 3D subspace plot, bottom: sensitivity indices of the input variables obtained with the approximation model)

ANSYS durchgeführt. Die Nachweise beinhalteten Spannungs-, Querschnitts- und Biegedrill- bzw. Biegeknicknachweise sowie Nachweise für die Gebrauchstauglichkeit. Weitere Informationen zu den Nachweisen sind [5] zu entnehmen.

Für beide Dachvarianten wurde die vorgestellte Sensitivitätsanalyse mittels Metamodell Optimaler Prognose durchgeführt und mit den Ergebnissen einer Analyse mittels linearer und quadratischer Polynome verglichen. Dabei wurden 500 Stichproben der Designparameter mit der Latin Hypercube-Methode erzeugt und mit dem numerischen Modell ausgewertet. In Bild 5 sind die sich ergebenden wichtigen Einflussgrößen exemplarisch für die maximale Normalspannung in den Randpfetten in Dachvariante A dargestellt. Das Bild zeigt einen deutlichen nichtlinearen Einfluss von Geländehöhe und Schneelastzone. Dieser Einfluss wird von dem MOP sehr gut wiedergegeben, hohe Bestimmtheiten (CoP-Werte) werden erreicht. Unter Verwendung eines linearen Ansatzes allerdings kann der Zusammenhang nur zu 57 %, mit Hilfe eines quadratischen Polynoms nur zu 81 % erklärt werden. Weiterhin zeigen die Einzelwichtigkeiten des quadratischen Polynoms sichtbare Abweichungen (die Summe der CoI-Werte liegt weit unterhalb des Gesamt-CoD), dies ist durch die hohe Anzahl von Polynomkoeffizienten begrün-

det (19 Eingangsvariablen entsprechen bereits 210 Koeffizienten). Das heißt, weniger als 500 Modellauswertungen bei nur 19 Eingangsvariablen sind mit einem quadratischen Polynommodell kaum sinnvoll auszuwerten.

Dieser Effekt wird bei Dachvariante B noch verstärkt (Bild 6): Da in diesem Modell 25 Eingangsgrößen als Designvariablen definiert wurden, ist die Prognosefähigkeit des quadratischen Polynommodells (351 Koeffizienten) kaum besser als die des linearen Modells. Die relativ hohen Werte des CoD täuschen allerdings eine bessere Approximationsqualität vor. Mit Hilfe des MOP ist die Prognosefähigkeit ähnlich hoch wie bei Variante A und sinnvolle Aussagen zum Einfluss der Designvariablen können getroffen werden. Analog zur Dachvariante A sind auch bei Variante B die Geländehöhe sowie die Schneelastzone massgebend. Weitere Ergebnisse dieser Analysen sind in [5] zu finden.

## 4.2 Optimierung von Geschwindigkeits-Zeit-Verläufen eines Fahrzeugs

In dem zweiten Anwendungsbeispiel war es die Aufgabe, den Geschwindigkeitsverlauf eines Fahrzeuges über eine bestimmte Fahrstrecke zu optimieren. Dabei sollten Randbedingungen wie eine vorgegebene Maximalgeschwindigkeit, maximale und minimale Beschleunigungen eingehal-

ten werden. Das numerische Berechnungswerkzeug war allerdings nicht in der Lage, das Abbremsverhalten konsistent abzubilden. Innerhalb des letzten Zeitschritts vor einem Haltepunkt wurde die Geschwindigkeit numerisch zu Null gesetzt. Durch diesen „Trick“ hat sich allerdings ein Beschleunigungs-Zeit-Verlauf ergeben, der Singularitätsstellen aufweist (Bild 7).

Aufgrund dieser Singularitätsstellen konnte die minimale Beschleunigung, welche aus dem Zeitsignal abgegriffen wurde, nicht ausreichend genau bestimmt werden. Als Resultat konnte der Optimierungsalgorithmus nicht konvergieren (Bild 8).

Dieser Sachverhalt hätte sich mit einer Voranalyse mit dem Metamodell Optimaler Prognosefähigkeit bereits aufzeigen lassen können: Die Variation der minimalen Beschleunigung aus dem Zeitverlauf ließ sich Hilfe der Variation der Eingangsvariablen nur zu 45 % erklären. Das heißt, nicht erklärbares Verhalten, sogenanntes Solverrauschen, dominiert diese Antwortgröße. Infolge kleiner Veränderungen der Eingangsvariablen kommt es zu großen Veränderungen der Antwortgröße (auch in Bild 7 ersichtlich). Das Berechnungsmodell verhält sich somit nicht robust und ist daher nicht für eine automatische Optimierung mit deterministischen Verfahren geeignet. Möglich wäre in dem Fall nur die Anwendung zufälliger Suchstra-

tegien, wie Evolutionärer Algorithmen, die allerdings weit aus mehr Modellauswertungen benötigen und wesentlich ungenauere Ergebnisse liefern.

Mit Hilfe der Ergebnisse des MOP konnte allerdings doch eine erfolgreiche Optimierung durchgeführt werden: Wenn man die minimale Beschleunigung nur in dem Bereich abfragt, der die Singularitätsstelle nicht umfasst, ist die Erklärbarkeit dieser Größe wieder gegeben, wie in Bild 9 dargestellt.

Die Anwendung zeigt, dass das MOP nicht nur zur effizienten Identifikation von wichtigen Einflussgrößen verwendet werden kann, es kann auch zur Analyse der Modellrobustheit gegenüber kleinen Änderungen der Eingangsgrößen benutzt werden. Diese Vorgehensweise liefert somit auch wichtige Erkenntnisse zur richtigen Modell- oder Antwortgrößenwahl für eine anschließende Systemoptimierung.

### 5 Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel wurde eine effiziente Methode zur varianzbasierten Sensitivitätsanalyse an praxisrelevanten Anwendungsbeispielen demonstriert. Analog zur direkten varianzbasierten Analyse werden bei dem Metamodell Optimaler Prognose die Beiträge einzelner Eingangsvariab-

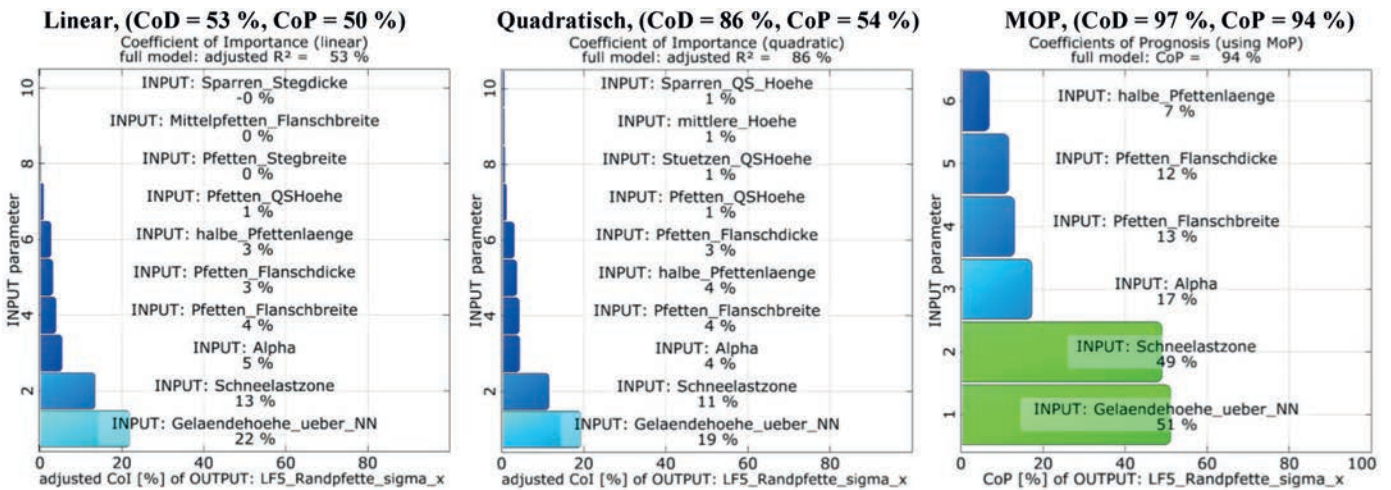


Bild 6. Normalspannung der Randpfette in Modell B: Beitrag der Eingangsgrößen zur Variation der Normalspannung bei Approximation mit linearem und quadratischem Polynom sowie mit dem MOP

Fig. 6. Normal stress of the outer stringer in model B: Sensitivity indices of the input variables using a linear and quadratic polynomial as well as the MOP

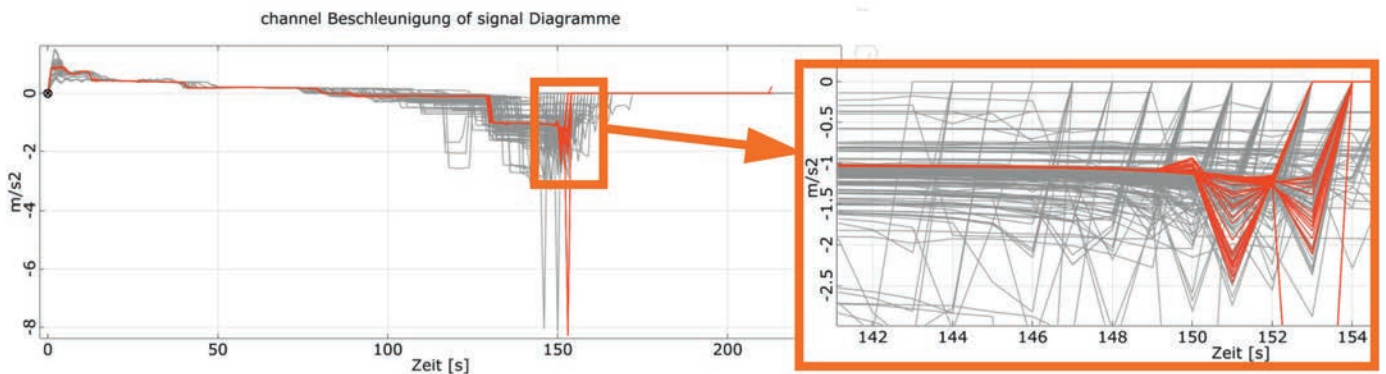


Bild 7. Beschleunigungs-Zeit-Verlauf einer numerischen Geschwindigkeitssimulation mit Singularitätsstellen im Abbremsbereich (dargestellt sind 100 Berechnungsläufe mit leicht variierten Eingangsparametern)

Fig. 7. Acceleration-time-diagram of a numerical velocity simulation with singularity points in the braking phase (100 simulation runs with slightly varying input parameters are shown)



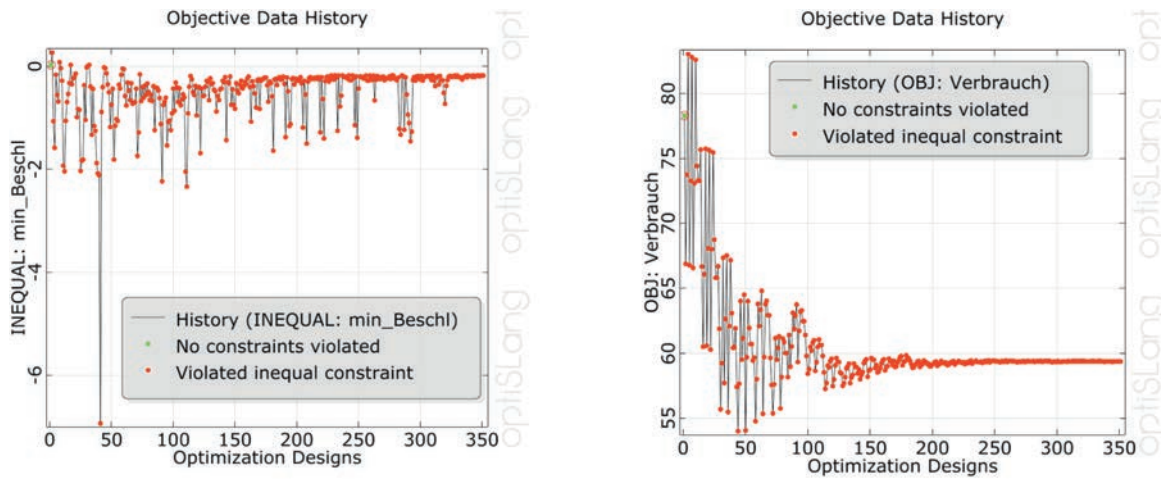


Bild 8. Konvergenzverläufe der minimalen Beschleunigung (Nebenbedingung) und des Kraftstoffverbrauchs (Zielfunktion) während der Optimierung mit einem adaptiven Antwortflächenverfahren  
 Fig. 8. Convergence history of the minimum acceleration used in the constraints and the fuel consumption used as objective function during an optimization run with an adaptive response surface method

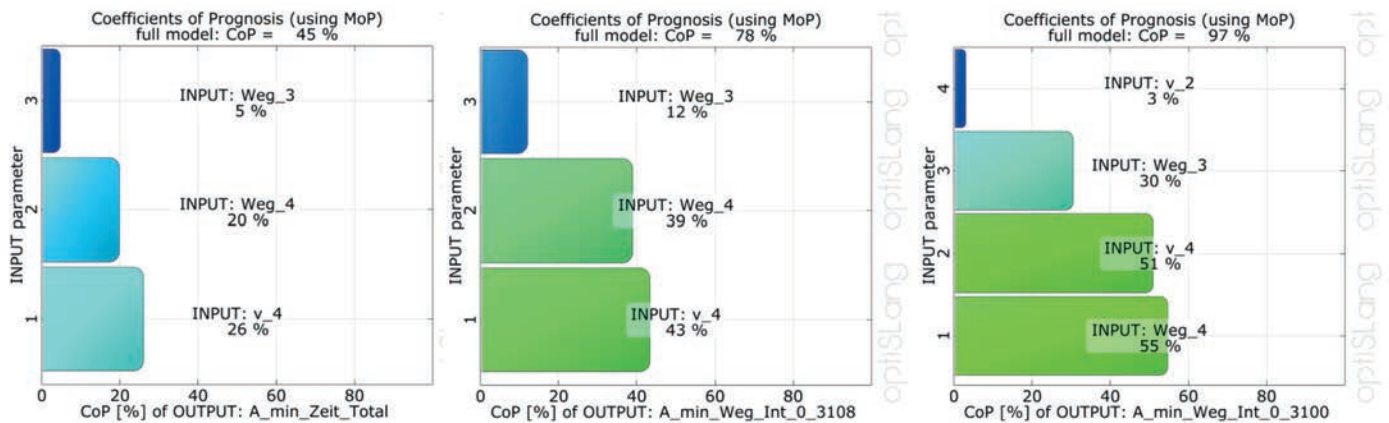


Bild 9. Erklärbare Variation der minimalen Beschleunigung unter Verwendung des vollen Wegintervalls (links, 0 bis 3109 m), unter Verwendung eines leicht reduzierten Intervalls (Mitte, 0 bis 3108 m) und unter Verwendung eines Intervalls ohne die Singularitätsstelle (rechts, 0 bis 3100 m)  
 Fig. 9. Explainable variation of the minimum acceleration by using the full displacement interval (left, 3109 m), by using a slightly shorter interval (middle, 3108 m) and by using a shorter interval outside the singularity point (right, 3100 m)

len durch Varianzstatistik ermittelt, wodurch auch stark nichtlineare Zusammenhänge sowie auch Interaktionsbeziehungen zwischen den Eingangsvariablen abgebildet werden können. Allerdings sind bei Anwendung des MOP weitaus weniger Berechnungsdurchläufe des zu analysierenden Modells notwendig als bei anderen direkten Schätzverfahren. Da bei praktischen Aufgabenstellungen oftmals hohe Rechenzeiten für einen Modellaufruf zu erwarten sind, ist diese Eigenschaft essentiell für eine erfolgreiche Anwendung in der Ingenieurpraxis. Die Dynardo GmbH hat die vorgestellte Methodik bereits erfolgreich in vielen Entwicklungsprozessen der virtuellen Produktentwicklung etabliert. Durch die Verfügbarkeit im Softwarepaket optiSLang ist bereits eine Vielzahl von Anwendungen im Bauingenieurbereich, wie auch in anderen Ingenieurdisziplinen zu finden.

#### Literatur

- [1] Saltelli, A. et al.: Global Sensitivity Analysis. The Primer. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2008.
- [2] Sobol', I. M.: Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. Mathematical Modelling and Computational Experiment (1993), 1, pp. 407–414.
- [3] Most, T., Will, J.: Sensitivity analysis using the Metamodel of Optimal Prognosis. Tagesband der Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag 8.0, 2011.
- [4] Lancaster, P., Salkauskas, K.: Surface generated by moving least squares methods. Mathematics of Computation (1981), 37, pp. 141–158.
- [5] Dannenberg, T.: Untersuchung von Optimierungsmethoden für die Optimierung freistehender Dachkonstruktionen mit diskreten Systemparametern. Masterarbeit, Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, 2013.

#### Autoren dieses Beitrages:

Dr.-Ing. Thomas Most  
 thomas.most@dynardo.de  
 Dr.-Ing. Johannes Will  
 johannes.will@dynardo.de  
 beide  
 Dynardo GmbH  
 Steubenstraße 25, 99423 Weimar  
 Tino Dannenberg  
 Bauhaus Universität Weimar  
 Institut für Strukturmechanik  
 Marienstraße 15, 99423 Weimar  
 tino.dannenberg@uni-weimar.de