

# Robustheits- und zuverlässigkeitsbasierte Mehrkriterien-Optimierung von Verdichterschaufeln

Peter Michael Flassig\*, Amit Kumar Dutta, Dieter Bestle

Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik – BTU Cottbus

## Zusammenfassung

Eine bestmögliche Wirkungsgradcharakteristik, sowohl im Auslegungspunkt als auch über den gesamten Teil- und Überlastbereich, bei einer geforderten Strömungsumlenkung ist einer der wesentlichen Anforderungen in der aerodynamischen Auslegung von Verdichterschaufeln. Aus deterministischer Sicht wurde der Widerspruch in den Auslegungskriterien von Dutta u. a. (2008) über einen Mehrkriterien-Optimierungsansatz gelöst, bei dem gleichzeitig das deterministische Minimum der Verlustpolaren und ein möglichst großer Arbeitsbereich bei Einhaltung der geforderten Strömungsumlenkung gesucht wurden. Unberücksichtigt blieben dabei Unsicherheiten der aerodynamischen Güte und Abströmwinkel bei streuenden Eingangsgrößen, weshalb mit inakzeptablen Ausfallraten durch zu geringe Umlenkung zu rechnen wäre. Daher ist es von enormer Bedeutung, Unsicherheiten innerhalb der aerodynamischen Verdichterschaufelauslegung moderner Flugzeugtriebwerke direkt zu berücksichtigen.

Kern der Arbeit bildet die Überführung einer rein deterministischen, vektoriellen Schaufelprofiloptimierung in eine probabilistische Problemformulierung. Als unsichere Größe wird exemplarisch das Verhältnis der maximalen Dicke zur Profildicke variiert. Ein robuster Schaufelentwurf liegt vor, wenn die ersten beiden statistischen Momente der unsicheren Systemantwort, d. h. der Erwartungswert und die Varianz des Verlustes, minimal sind. Diese beiden Ziele sind konfliktär, weshalb ein vektorieller Optimierungsansatz gewählt wird. Ein zuverlässiger Schaufelentwurf ist durch eine möglichst geringe Ausfallwahrscheinlichkeit der Umlenkungsnebenbedingung gekennzeichnet, weshalb diese ebenfalls als Zielfunktion berücksichtigt wird. Die Schaufeloptimierung wird mit Hilfe des Prozessintegrationswerkzeugs *optiSLang* umgesetzt. Zusätzlich wird eine Sensitivitätsanalyse in *optiSLang* realisiert, um den unsicheren Entwurfsraum besser zu verstehen.

**Keywords:** aerodynamischer Verdichterentwurf, probabilistische Mehrkriterien-Optimierung, Sensitivitätsanalyse, Prozessintegration/ -parallelisierung

---

\*Kontakt: Peter Michael Flassig, Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik – Brandenburgische Technische Universität, Siemens-Halske-Ring 14, D-03046 Cottbus, E-Mail: [flassig@tu-cottbus.de](mailto:flassig@tu-cottbus.de)

# 1 Einleitung

Der aerodynamische Verdichterentwurf spielt in der Auslegung eines Triebwerks eine entscheidende Rolle, Steffens und Schäffler (2000). Das gegenwärtige Konzept in der aerodynamischen Verdichterauslegung ist ein schrittweise komplexer werdender Prozess, bei dem die Anzahl der Entwurfsparameter stetig ansteigt, Keskin (2007). Startpunkt ist klassischerweise die eindimensionale Mittelschnittsrechnung, bei der die Ringraumgeometrie, grundlegende thermo- und aerodynamische Stufenein- und -austrittsgrößen sowie Leistungsdaten wie Verdichtergesamtdruckverhältnis, Wirkungsgrad und Pumpgrenze festgelegt werden. Ist ein Parametersatz gefunden, werden mit Hilfe des zweidimensionalen Stromlinienkrümmungsverfahrens radiale Verteilungen aerodynamischer und thermodynamischer Parameter an spezifischen axialen Positionen des Ringraums in der sogenannten S2-Strömungsebene nach Wu (1952) von der Nabe bis zum Gehäuse definiert, wobei der Detaillierungsgrad insbesondere der Ringraumgeometrie stark ansteigt. Auf der Grundlage des resultierenden zweidimensionalen Strömungsfeldes werden zunächst zweidimensionale Schaufelprofile generiert und einer 2D-CFD-Analyse zugänglich gemacht. Durch radiales Auffädeln und Anwendung moderner Gestaltungsprinzipien zur Beeinflussung der Sekundärströmungen wird eine dreidimensionale Schaufel erzeugt, die dann mittels 3D-CFD weiter analysiert wird.

Die Berücksichtigung von Unsicherheiten aus Fertigung und Betrieb innerhalb der aerodynamischen Verdichterauslegung steht dabei erst in den Anfängen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, am Beispiel der 2D-Verdichterschaufelauslegung für ein einfaches Szenario, wie in Flassig u. a. (2008a) gezeigt, eine deterministische Problemformulierung in eine probabilistische zu überführen. Die zur Optimierung erforderliche Prozessintegration und -automatisierung wird in *optiSLang* Dynardo (2008) realisiert, wobei die statistische Auswertung in *Matlab* The Mathworks (2007) erfolgt. Als vektorieller Optimierungsalgorithmus kommt SPEA2 zur Anwendung, der am Beispiel einer Testfunktion mit zwei weiteren evolutionären Algorithmen verglichen wird. Als Ausblick auf zukünftige Untersuchungen erfolgt eine Sensitivitätsanalyse innerhalb von *optiSLang*, um den unsicheren Entwurfsraum nach Lange u. a. (2008) besser zu verstehen. Ziel ist, die Zugänglichkeit zu einer robustheits- und zuverlässigkeitsbasierten Mehrkriterien-Optimierung innerhalb eines deterministischen Entwurfsraumes zu ermöglichen.

## 2 Optimieralgorithmen im Vergleich

Auf dem Gebiet der Mehrkriterien-Optimierung finden vor allem evolutionäre Algorithmen Anwendung. Der Erfolg einer vektoriellen Optimierung ist dabei zum größten Teil durch die gefundene Menge nicht-dominierter Lösungen, d. h. der Pareto-Front, charakterisiert. Diese sollte zum einen möglichst dicht besetzt und breit sein, zum anderen nahe an der wahren Pareto-Front liegen.

Vor der Anwendung auf das oben dargestellte Problem soll der in *optiSLang* implementierte *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2) nach Zitzler u. a. (2001) mit zwei Algorithmen aus der *iSIGHT-FD* Integrationsumgebung, Engenious Software Inc. (2008) verglichen werden. Dies sind im Einzelnen der *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) nach Deb (2001) und der *Archive-based Micro Genetic Algorithm* (AMGA) nach Tiwari u. a. (2008). Der Vergleich erfolgt anhand des Testproblems ZDT3

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad \mathcal{P} = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{18} \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{1} \}, \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{p}) &= p_1 \\ f_2(\mathbf{p}) &= g(\mathbf{p})h(f_1(\mathbf{p}), g(\mathbf{p})) \\ g(\mathbf{p}) &= 1 + \frac{9}{29} \sum_{i=2}^{30} p_i \\ h(f_1(\mathbf{p}), g(\mathbf{p})) &= 1 - \sqrt{\frac{f_1(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p})} - \frac{f_1(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p})} \sin(10\pi f_1(\mathbf{p}))} \end{aligned} \quad (2)$$

nach Deb u. a. (2000). Die Schwierigkeit dieses Optimierungsproblems besteht in der stückweise stetigen Pareto-Front  $\mathcal{F}^P$ , gegeben durch  $p_i = 0$  für  $p_i = 2(1)30$ . Die Charakterisierung der Lösungsmenge erfolgt über das Abstandskriterium  $d_i$ , Abbildung 1a, ausgedrückt durch das arithmetische Mittel und die Standardabweichung

$$\mu_d := \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l d_i \quad \text{und} \quad \sigma_d := \sqrt{\frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (d_i - \mu_d)^2} \quad (3)$$

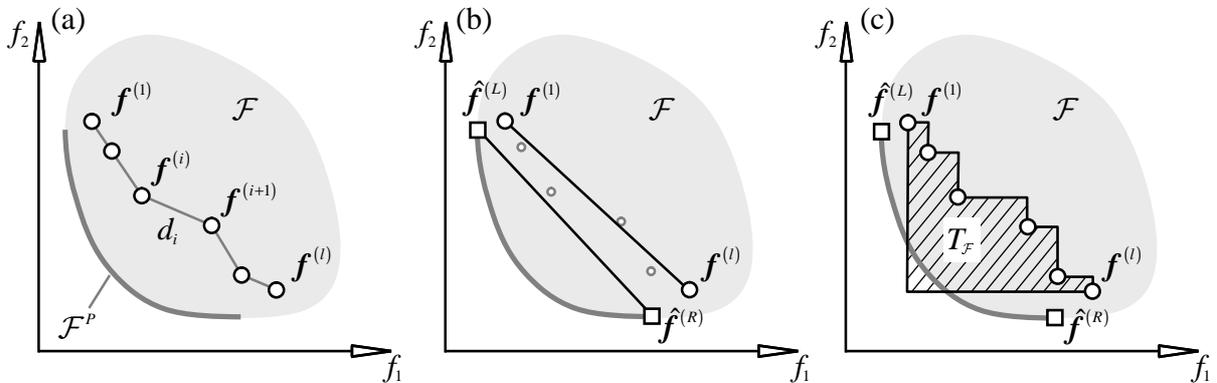
mit  $l := |\mathcal{F}^P| - 1$ , wobei  $|\mathcal{F}^P|$  die Anzahl der nicht-dominierten Lösungspunkte ist und

$$d_i := \sqrt{(f_2^{(i+1)} - f_2^{(i)})^2 + (f_1^{(i+1)} - f_1^{(i)})^2}, \quad (f_1^{(i)}, f_2^{(i)}) \in \mathcal{F}^P, \quad i = 1 \dots l, \quad (4)$$

die Abstände der sortierten Pareto-Punkte bezeichnet.

Liegen die Randpunkte  $f^{(1)}, f^{(l)}$  der Pareto-Menge in unmittelbarer Nähe der individuellen Minima  $\hat{f}^{(L)}, \hat{f}^{(R)}$  kann die Front als hinreichend breit eingeschätzt werden. Als Maß dafür dient die relative Breite

$$b(\mathcal{F}^P) := \frac{\sqrt{(f_1^{(1)} - f_1^{(l)})^2 + (f_2^{(1)} - f_2^{(l)})^2}}{\sqrt{(\hat{f}_1^{(L)} - \hat{f}_1^{(R)})^2 + (\hat{f}_2^{(L)} - \hat{f}_2^{(R)})^2}}, \quad (5)$$



**Abbildung 1:** Diskussion nicht-dominierten Lösungen: Abstandskriterium (a), Breite der Front (b) und reduzierte Treppenfunktion (c)

	SPEA2	AMGA	NSGA-II	
Archivgröße	100/200	100/200	–	
Anz. d. Generationen	60/126	–/–	60/126	
Populationsgröße	20/50	–/–	20/50	
Fkt.-auswertungen	–/–	1200/6300	–	
initiale Pop.-größe	–/–	100/200	–	
$\bar{\mu}_d$	0.0918/0.0396	0.0125/0.0019	0.0150/0.0020	0.0113 <sup>1</sup> /0.0015 <sup>1</sup>
$\bar{\sigma}_d$	0.0783/0.0413	0.0226/0.0086	0.0258/0.0086	0.0466 <sup>1</sup> /0.0074 <sup>1</sup>
$\bar{T}_{\mathcal{F}}/T_{\mathcal{F}}^e$	3.2394/1.5275	1.0047/1.0003	1.0381/1.0002	1.1121 <sup>1</sup> /1.0037 <sup>1</sup>
$\bar{b}(\mathcal{F}^P)$	1.1818/1.0259	0.9940/0.9981	0.9757/0.9986	1.0000 <sup>1</sup> /1.0000 <sup>1</sup>

**Tabelle 1:** Charakteristiken nicht-dominierter Lösungen der ZDT3 Testfunktion (<sup>1</sup> *modeFRONTIER 3.2* Implementierung, Ergebnisse nach Hinz (2007))

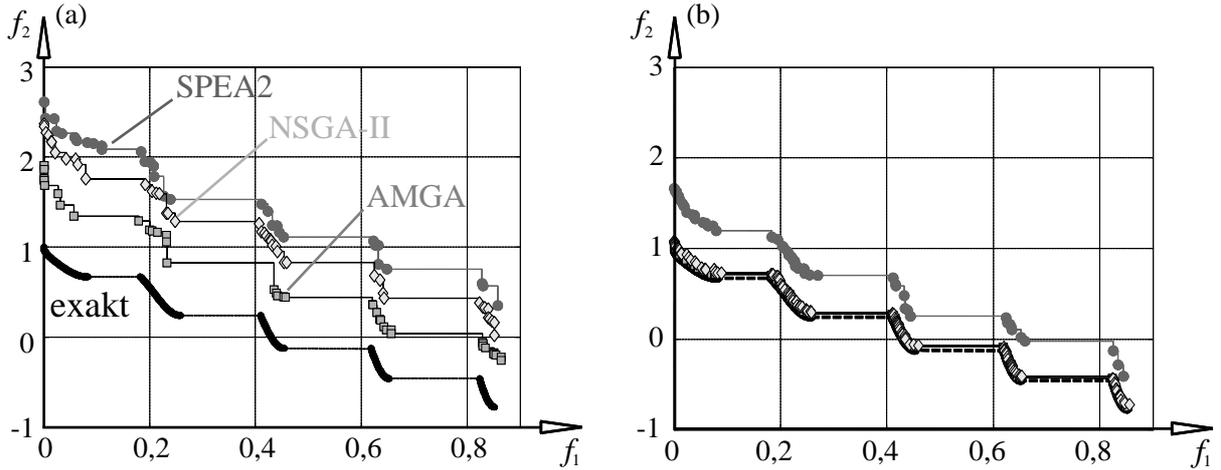
Abbildung 1b. Die reduzierte Fläche  $T_{\mathcal{F}}$  unterhalb der Treppenfunktion, d. h.

$$T_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{l-1} \left( f_2^{(i)} - f_2^{(l)} \right) \left( f_1^{(i+1)} - f_1^{(i)} \right), \quad (6)$$

dient als Konvergenzindikator, Abbildung 1c. Tabelle 1 fasst die gemittelten Ergebnisse von zwei Optimierungsklassen mit jeweils zehn Optimierungsläufen zusammen. Zudem zeigt Abbildung 2 die nicht-dominierenden Fronten je eines charakteristischen Laufes. Generell wird bei allen Algorithmen durch einen höheren Rechenaufwand sowohl die Breite und Diversität der nicht-dominierenden Front erhöht, als auch die Konvergenz gegen die wahre Pareto-Front verbessert. Interessant sind die Ergebnisse vor allem für die Optimierungsklasse mit geringem Aufwand. Hier ist der AMGA dem NSGA-II und dieser wiederum dem SPEA2 bezüglich Konvergenz überlegen. Die Diversität der Fronten von AMGA und NSGA-II sind in etwa gleich. Alle drei Optimierer fanden bei fast allen Läufen jede der fünf möglichen lokalen Pareto-Fronten, Abbildung 2a. Für die Optimierungsklasse mit hohem Aufwand liefern der AMGA und NSGA-II vergleichbare Ergebnisse nahe der exakten Lösung. SPEA2 schneidet in allen vier Kriterien eindeutig schlechter ab als die beiden anderen Algorithmen, Tabelle 1. Die Ergebnisse des NSGA-II in *iSIGHT-FD 3.0* entsprechen übrigens denen des entsprechenden Algorithmus in *modeFRONTIER 3.2* ESTECO GmbH (1999).

### 3 Parametrisierung von Verdichterschaufelsektionen

Der Erfolg der Optimierung hängt entscheidend von der Entwurfsparametrisierung ab. Für die Beschreibung einer Verdichterschaufelsektion, Abbildung 3a, existieren mehrere Möglichkeiten. In weiter zurückliegenden Optimierungsansätzen wurde die Parametrisierung der dimensionsbehafteten Kontur über Freiformkurven bevorzugt, Keskin (2007), Büche u. a. (2003) und Köller u. a. (2000). Nach Abbott und Doenhoff (1949) lässt sich die Profilkontur aber auch aus einer Skelettlinie  $f$  und einer dazu rechtwinkelig superponierten Dickenverteilung  $T$  aufbauen. In Anlehnung daran wird in der vorliegenden Untersuchung die Skelettlinienwinkelverteilung  $\beta$  auf die Metallwinkel  $\beta_{I,E}$  an der Vorder- und Hinterkante des Profils normiert und als Funktion der normierten Sehnenlänge  $\tilde{x}$



**Abbildung 2:** Exemplarische, nicht-dominierte Lösungen der ZDT3 Testfunktion für verschiedene Optimieralgorithmen und zwei Optimierungsklassen mit geringem (a) und hohem (b) Aufwand

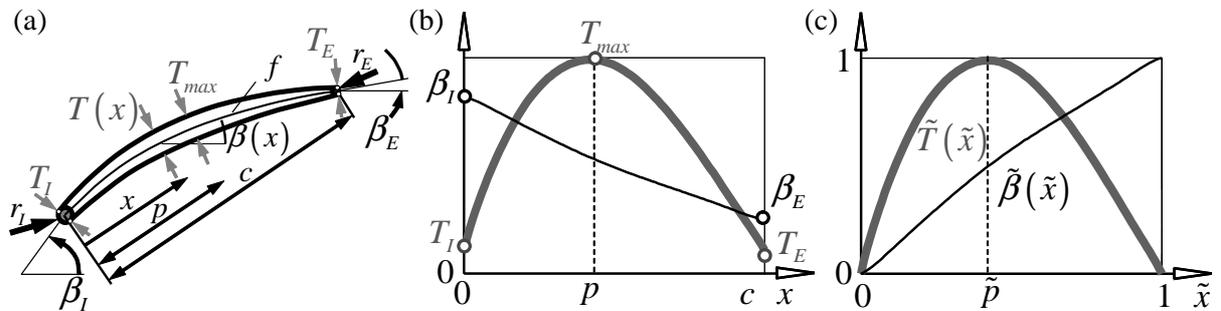
dargestellt, Abbildung 3b,c:

$$\tilde{\beta}(\tilde{x}) = \frac{\beta_I - \beta(\tilde{x})}{\beta_I - \beta_E} \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = \frac{x}{c} \in [0,1]. \quad (7)$$

Die Dickenverteilung  $T$  hingegen wird in zwei Bereiche unterteilt und jeweils auf die korrespondierende Dicke  $T_{I,E}$  an der Vorder- bzw. Hinterkante sowie die maximale Dicke  $T_{max}$  normiert. Ebenfalls über der normierten Profilschne  $\tilde{x}$  aufgetragen, Abbildung 3b,c, ergibt sich

$$\tilde{T}(\tilde{x}) = \begin{cases} \frac{T(\tilde{x}) - T_I}{T_{max} - T_I} & \text{für } \tilde{x} \leq \tilde{p} \\ \frac{T(\tilde{x}) - T_E}{T_{max} - T_E} & \text{für } \tilde{x} > \tilde{p} \end{cases} \quad (8)$$

mit der bezogenen Stelle  $\tilde{p} = p/c$  der maximalen Profildicke. Die Parametrisierung der dimensionslosen Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilung für die vorliegende Untersuchung wird aus Flassig u. a. (2008a) übernommen. Für die dimensionslose Skelettlinienwinkelverteilung wird eine B-Spline Kurve zweiten Grades mit äquidistantem Knotenvektor und



**Abbildung 3:** Geometrisches Modell einer Verdichterschweifsektion (a), dimensionsbehaftete (b) und dimensionslose (c) Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilung

fünf Kontrollpunkten verwendet:

$$\mathbf{C}_{\tilde{\beta}}(u) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\tilde{\beta}}(u) \\ \tilde{\beta}(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^4 N_{i,2}(u) \mathbf{P}_{\tilde{\beta},i} \quad (9)$$

mit dem Kurvenparameter  $u \in [0,1]$ , den Basispolynomen  $N_{i,2}$  nach Piegl und Tiller (1997), sowie den Kontrollpunkten  $\mathbf{P}_{\tilde{\beta},i}$ , Abbildung 4a. Angesichts geometrischer Restriktionen an die Kurve  $\mathbf{C}_{\tilde{\beta}}$  ergeben sich in Summe sechs Freiheitsgrade zusammengefasst in der Kontrollpunktmatrix

$$\mathbf{P}_{\tilde{\beta}} = [\mathbf{P}_{\tilde{\beta},0} \cdots \mathbf{P}_{\tilde{\beta},4}] = \begin{bmatrix} 0 & p^{(1)} & p^{(3)} & p^{(5)} & 1 \\ 0 & p^{(2)} & p^{(4)} & p^{(6)} & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

wobei  $p^{(i)}$  die frei wählbaren Entwurfsvariablen sind. Die dimensionslose Dickenverteilung  $\tilde{T}(\tilde{x})$  ist ebenfalls über eine B-Spline Kurve zweiten Grades, jedoch mit sieben Kontrollpunkten definiert, Abbildung 4a:

$$\mathbf{C}_{\tilde{T}}(u) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_T(u) \\ \tilde{T}(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^6 N_{i,2}(u) \mathbf{P}_{\tilde{T},i}. \quad (11)$$

Um Tangentenstetigkeit im Punkt der maximalen Dicke  $\tilde{x} = \tilde{p}$  zu garantieren, benötigt man einen speziellen Knotenvektor

$$U_{\tilde{T}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1 \ 1]^T. \quad (12)$$

Unter Berücksichtigung geometrischer Restriktionen ergibt sich damit folgende Kontrollpunktmatrix mit sieben Freiheitsgraden:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{T}} &= [\mathbf{P}_{\tilde{T},0} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},1} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},2} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},3} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},4} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},5} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},6}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & p^{(7)} & p^{(9)} & p^{(10)} & p^{(11)} & p^{(12)} & 1 \\ 0 & p^{(8)} & 1 & 1 & 1 & p^{(13)} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Als weiterer Parameter mit signifikantem Einfluss auf die aerodynamische Güte der Sektion wird das Verhältnis der maximalen Dicke zur Profilhöhe

$$tc = \frac{T_{max}}{c} \quad (14)$$

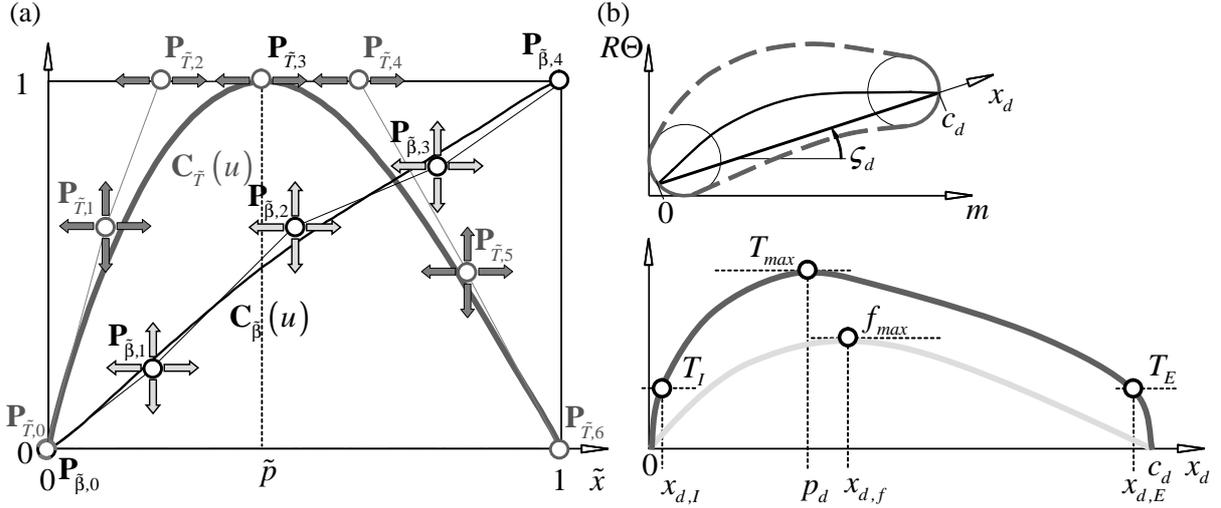
in den Entwurfsvektor aufgenommen. Weitere Entwurfsvariablen sind die Metallwinkel  $\beta_{I,E}$  an der Vorder- und Hinterkante, die eine optimale Positionierung des Profils in der Strömung ermöglichen. Durch Normierung aller dimensionsbehafteten Parameter auf das Intervall  $[0, 1]$  unter Vorgabe definierter Grenzen für das Dickenverhältnis und die Metallwinkel, d. h.

$$p^{(14)} = \frac{tc^{min} - tc}{tc^{min} - tc^{max}} \quad \text{und} \quad p^{(15,16)} = \frac{\beta_{I,E}^{min} - \beta_{I,E}}{\beta_{I,E}^{min} - \beta_{I,E}^{max}}, \quad (15)$$

ergibt sich der 16-dimensionale Entwurfsvektor  $\mathbf{p}$  sowie der zulässige geometrische Parameterraum  $\mathcal{G}$  für die Optimierung zu

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{16} \mid h_1(\mathbf{p}) > 0, h_2(\mathbf{p}) > 0, 0 \leq p^{(i)} \leq 1, i = 1(1)16\}. \quad (16)$$

Die Ungleichheitsnebenbedingungen  $h_{1,2} > 0$  sind durch die Forderung motiviert, dass die dimensionslosen Verteilungen der Skelettlinienwinkel  $\tilde{\beta}(\tilde{x})$  und der Dicke  $\tilde{T}(\tilde{x})$  die Eigenschaft einer eindeutigen Abbildung besitzen sollen. Dazu müssen die  $\tilde{x}$ -Werte sowohl für



**Abbildung 4:** Parametrisierte dimensionslose Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilungen als B-Spline Kurve (a) und parametrisches Profilmodell nach Länge u. a. (2008) (b)

die dimensionslose Skelettlinienwinkelverteilung als auch für die Dickenverteilung monoton ansteigen:

$$h_1(\mathbf{p}) = \frac{d\tilde{x}_{\tilde{\beta}}(u, \mathbf{p})}{du} > 0, \quad h_2(\mathbf{p}) = \frac{d\tilde{x}_T(u, \mathbf{p})}{du} > 0 \quad \forall u \in [0,1]. \quad (17)$$

Die Berücksichtigung von Produktionsunsicherheiten, sofern bekannt, setzt eine hinreichend genaue Quantifizierung der streuenden Parameter und deren Abhängigkeiten untereinander voraus. Die unsicheren Parameter müssen dabei nicht unbedingt Teil des Entwurfsvektors der Optimierung sein, sondern können dem deterministischen Entwurf superponiert werden. In Abbildung 4b ist das parametrische Modell nach Länge u. a. (2008) dargestellt, für das gesicherte Daten über die Streuungen existieren. Dieses basiert auf der Skelettlinienverteilung  $f_d$  und Dickenverteilung  $T_d$  als Funktion der wahren Sehnenlänge  $x_d$ . Unsichere Größen sind der Staffelungswinkel  $\zeta_d$ , die Sehne  $c_d$ , die maximale Wölbung  $f_{max}$  und deren Rücklage  $x_{d,f}$ , die Dicke der Vorder- bzw. Hinterkante  $T_{I,E}$  sowie die maximale Dicke  $T_{max}$ , und deren Positionen  $x_{d,I}$ ,  $x_{d,E}$  sowie  $p_d$  zusammengefasst im Vektor der unsicheren Parameter

$$\mathbf{d} = [c_d \quad \zeta_d \quad x_{d,f} \quad f_{max} \quad x_{d,I} \quad T_I \quad p_d \quad T_{max} \quad x_{d,E} \quad T_E]^T. \quad (18)$$

Zur Variation der gesamten Skelettlinie- und Dickenverteilung über die charakteristischen Punkte dienen Wichtungsfunktionen, Lange u. a. (2008).

## 4 Formulierung des Optimierungsproblems

Die elementaren Ziele bei der zweidimensionalen aerodynamischen Verdichterschaufelauslegung bestehen darin, einen Entwurf mit bestmöglicher Wirkungsgradcharakteristik sowohl im Auslegungspunkt selbst, als auch über den gesamten Teil- und Überlastbereich zu finden. Zudem wird gefordert, dass die aus der S2-Stromfläche geforderte Strömungsumlenkung für den Auslegungspunkt erreicht wird, um nicht nur den geforderten Druckanstieg zu erzielen, sondern auch die definierte Anströmung der stromab befindlichen Verdichterreihe zu garantieren. Als Äquivalent für den aerodynamischen Wirkungsgrad der

Kaskade wird in der vorliegenden Arbeit der in Youngren (1991) definierte dimensionslose Verlustbeiwert

$$\omega = \frac{p_{0,E}^{isen} - \bar{p}_{0,E}}{p_{0,I} - p_I} \quad (19)$$

gewählt mit dem isentropen Totaldruck  $p_{0,E}^{isen}$  am Austritt, dem massengemittelten Totaldruck  $\bar{p}_{0,E}$  am Austritt und dem Totaldruck bzw. statischen Druck  $p_{0,I}$  bzw.  $p_I$  am Eintritt der Kaskade. Zur Quantifizierung der Strömungsumlenkung im Auslegungspunkt wird die Differenz  $\epsilon$  zwischen gefordertem Abströmwinkel  $\alpha_{E,S2}^{DP}$  und erzieltm Abströmwinkel  $\alpha_{E,S1}^{DP}$  definiert, d. h.

$$\epsilon = \alpha_{E,S1}^{DP} - \alpha_{E,S2}^{DP}, \quad (20)$$

die einen Mindestwert  $\epsilon^c$  haben muss. Intention der vorliegenden Untersuchung ist, die deterministische Beurteilung des Verlustes und der Abströmung im Auslegungspunkt durch eine probabilistische Bewertung zu ersetzen. Dazu wird im Folgenden ein Problem mit unsicherem Verhältnis der maximalen Dicke zur Profilhöhe  $tc$  formuliert, die sich aufgrund von Fertigungstoleranzen der parametrisierten Geometrie überlagert. Für die Streuung wird eine normalverteilte Dichtefunktion, d. h.  $f_{TC}(tc) = \mathcal{N}(\mu_{TC}, \sigma_{TC})$ , angenommen. Über die nichtlinearen Zusammenhänge des Verlustes  $\omega$  und des Abströmwinkels  $\alpha_E$  als Funktion der relativen Dicke  $tc$ , d. h.  $\omega = \omega(tc)$  und  $\alpha_E = \alpha_E(tc)$ , ergeben sich bei unsicherem Dickenverhältnis  $TC$  entsprechend die unsichere Verlust- und Abströmwinkelantworten  $\Omega$  und  $A_E$ . Damit lassen sich die Dichtefunktionen der unsicheren Systemantworten wie folgt darstellen:

$$f_{TC}(tc) \xrightarrow{\omega=\omega(tc)} f_{\Omega}(\omega) \quad \text{und} \quad f_{TC}(tc) \xrightarrow{\alpha_E=\alpha_E(tc)} f_{A_E}(\alpha_E). \quad (21)$$

Ziel ist nun, sowohl den Erwartungswert  $\mu_{\Omega}^{DP}$ , als auch die Standardabweichung  $\sigma_{\Omega}^{DP}$ , d. h.

$$\mu_{\Omega}^{DP} = E[\Omega] \quad \text{und} \quad \sigma_{\Omega}^{DP} = \sqrt{E[(\Omega - \mu_{\Omega}^{DP})^2]} \quad (22)$$

zu minimieren. Um dabei auch möglichst zuverlässige Entwürfe zu erzwingen, wird die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$P_{TC}^f = P[|\epsilon(tc)| - \epsilon^c > 0] \quad (23)$$

ebenfalls in den Gütevektor aufgenommen:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \begin{bmatrix} \mu_{\Omega}^{DP} \\ \sigma_{\Omega}^{DP} \\ P_{TC}^f \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{G} \mid \omega_i^{DP} \leq \omega_i^c, \quad P_{TC}^f \leq 0.8 \} \quad (24)$$

Der zulässige Entwurfsraum  $\mathcal{P}$  ist Teilmenge des zulässigen geometrischen Parameter-raums  $\mathcal{G}$  mit einer zusätzlichen deterministischen Nebenbedingung, um die aerodynamische Belastung der Verdichterschaufelsektion respektive Stoßverluste  $\omega_i^{DP}$  unter eine obere Schranke  $\omega_i^c$  zu restringieren, und der Forderung nach mindestens 20% Zuverlässigkeit, um unerwünschte Lösungen von vornherein auszuschließen. Die Quantifizierung der Kriterien basiert, wie in Flassig u. a. (2008b) gezeigt, auf Splineapproximationen der Systemantworten und erwartungstreuen Schätzungen mit  $n = 10^6$  Stichproben.

## 5 Prozessintegration und Automatisierung

Wichtige Bestandteile der virtuellen Produktentwicklung sind eine robuste und effiziente Prozessintegration sowie eine Automatisierung der Optimierung. Die robuste Kopplung verschiedener Auslegungs- und Analysewerkzeuge, sowohl system- als auch netzwerkübergreifend, ein logisch aufgebauter Prozessfluss und minimaler Datentransfer bilden die Grundlage für eine erfolgreiche Optimierung.

Zur Integration aller für den hier verwendeten Prozess erforderlichen Analyseprogramme dient *optiSLang*. Der bereits in Flassig u. a. (2008a) detailliert beschriebene Prozess zur Umsetzung der im vorangegangenen Kapitel geschilderten Auslegung einer Verdichterschweifsektion besteht im Wesentlichen aus der Geometrierzeugung mittels *Matlab*, z. B. Magrab u. a. (2004), der aerodynamischen Güteevaluation über *Mises*, Youngren (1991), und der probabilistischen Bewertung in *Matlab*, Abbildung 5.

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, werden die generierten Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilungen zunächst bezüglich geometrischer Restriktionen, d. h. hinsichtlich  $h_{1,2}$ , überprüft. Sind diese verletzt, so werden allen relevanten Optimierungsgrößen benutzerdefinierte Strafterme  $S(k)$  mit dem Straftermparameter  $k = 6$  hinzugefügt und die Entwurfsevaluation terminiert. Diese Methodik setzt robuste Optimierungsalgorithmen wie MOGAs voraus und wäre für deterministische Optimierungsverfahren ungeeignet.

Die aerodynamische Güteevaluation erfolgt über ein lösungsunabhängiges, strukturiertes Netz, siehe Flassig (2007), und für fünf verschiedene Dickenverhältnisse. Ist die numerische Analyse für den Auslegungspunkt nicht konvergiert, werden wiederum allen wichtigen Optimierungsgrößen benutzerdefinierte Strafterme zugefügt, die jedoch entsprechend dem reduzierten Straftermparameter  $k$  kleiner als die obig definierten sind, und der Prozess wird terminiert. Dann erfolgt die sequentielle Berechnung vier verschiedener Profile mit abweichender relativer Dicke. Der Konvergenzstatus wird jeweils geprüft, so dass Tenden-

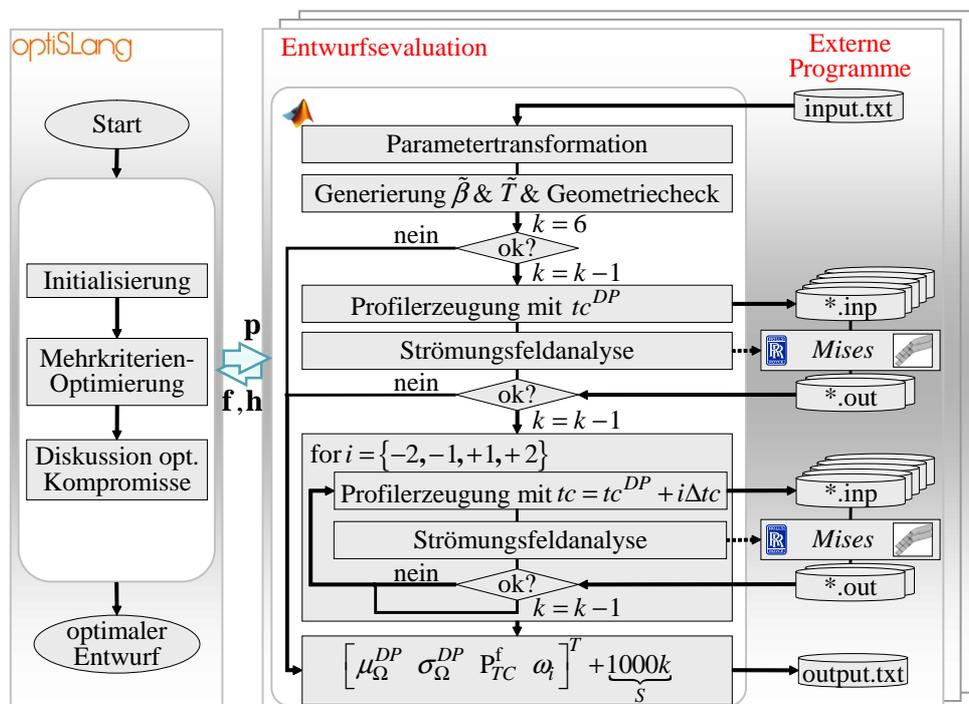


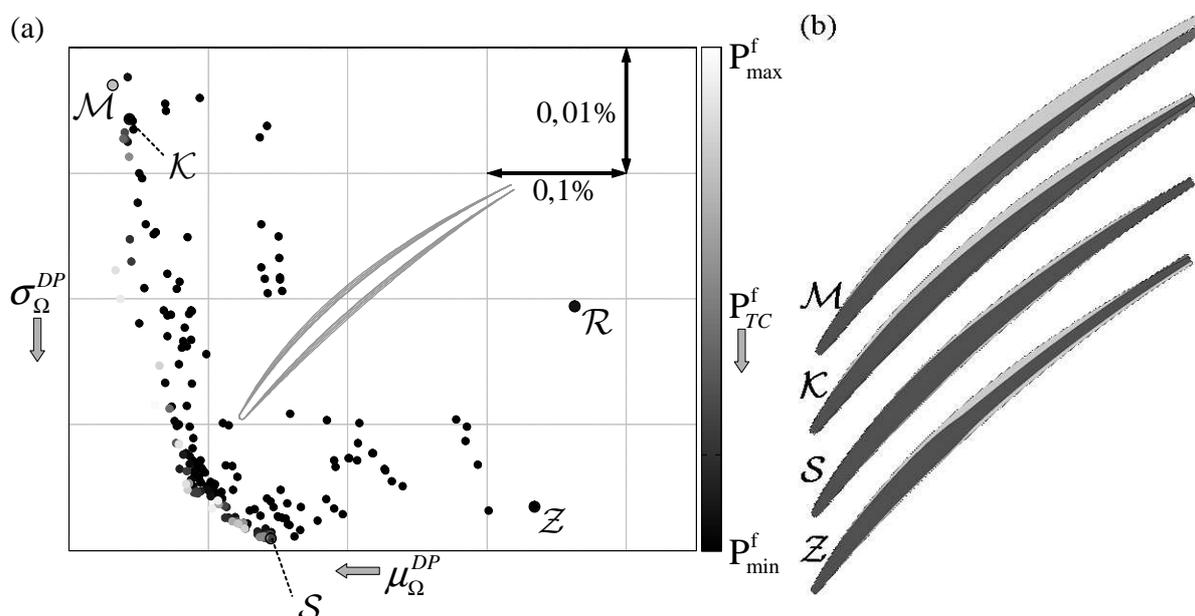
Abbildung 5: Prozess zur zuverlässigkeits- und robustheitsbasierten Optimierung

zen für den Optimierer erkennbar sind. Zur Reduktion der Rechenzeit wird die gesamte Entwurfsevaluation über *OpenPBS* von Math & Computer Science Division of Argonne National Laboratory (2004) parallelisiert. Für die folgenden Untersuchungen werden jeweils acht Rechnungen auf einem Cluster verteilt durchgeführt.

## 6 Optimierungsergebnisse

Die aerodynamische zuverlässigkeits- und robustheitsbasierte Mehrkriterien-Optimierung wird in dieser Arbeit exemplarisch für eine hochbelastete Mittensektion einer Rotorreihe eines bewährten Hochdruckverdichters durchgeführt. Die relative Anströmmachzahl  $M_I$  und die geforderte Strömungsumlenkung  $\epsilon$  liegen im Bereich von 0,85 bzw.  $20^\circ$ .

Für die Suche nach optimalen Kompromissen wird der evolutionäre Optimierer SPEA2 eingesetzt. Die Archivgröße beträgt 250, die Zahl der Eltern 80 und die der Generationen 100. Insgesamt erfolgen 8157 Funktionsauswertungen, von denen 53 Prozent alle Nebenbedingungen erfüllen. In Abbildung 6a sind alle 199 *Pareto-optimalen* Kompromisslösungen  $\mathcal{F}^P$  der Optimierung dargestellt, wobei das Kriterium der Zuverlässigkeit anhand von Graustufen bewertet wird. Im Vergleich zum Referenzentwurf  $\mathcal{R}$  können eindeutig bessere Geometrien gefunden werden. Für eine detailliertere Diskussion der Ergebnisse werden im Folgenden vier charakteristische Punkte  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{Z}$  und  $\mathcal{K}$ , d. h. der Punkt mit minimalem Mittelwert, minimaler Streuung, kleinster Ausfallwahrscheinlichkeit und das sogenannte Knie der Pareto-Front, ausgewählt. Ein Vergleich der Referenzgeometrie, Abbildung 6b, und die der charakteristischen Punkte zeigt die Unterschiedlichkeit der Entwürfe und bestätigt qualitativ die Lage im Kriterienraum. So ist es aus empirischer Sicht nicht verwunderlich, dass Entwurf  $\mathcal{M}$  die Strömung am stärksten im vorderen Profilbereich umlenkt, damit geringe Verluste im Auslegungspunkt garantiert, aber sehr empfindlich auf Änderungen der Geometrie reagiert. Ein möglichst unempfindlicher Entwurf bezüglich



**Abbildung 6:** Nicht-dominierte Lösungen  $\mathcal{F}^P$  der Mehrkriterien-Optimierung (a), sowie Geometrievergleich zwischen Referenzprofil (grau) und ausgewählten Kompromisslösungen (schwarz) (b)

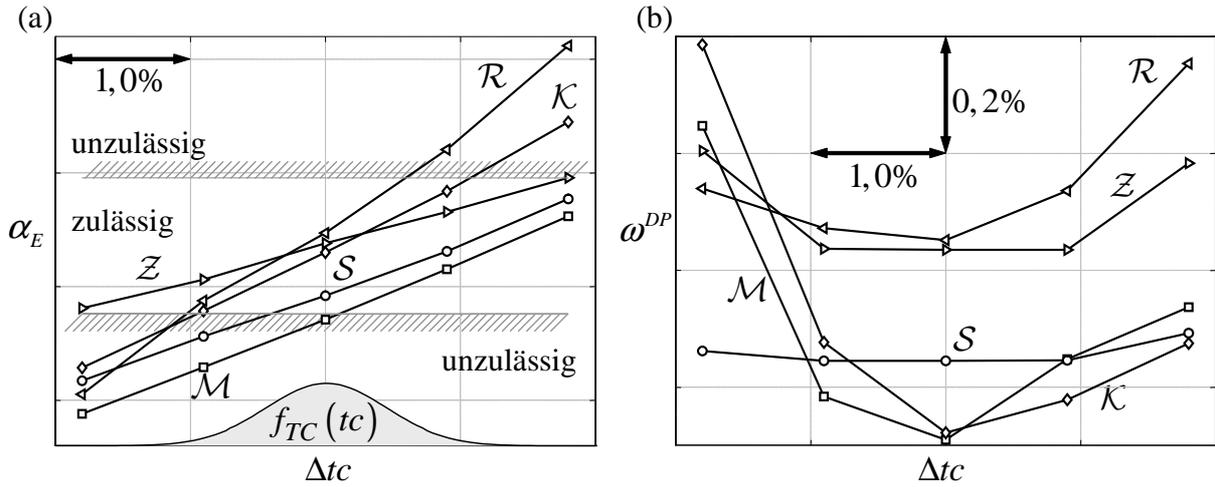


Abbildung 7: Profilverlust (a) und Abströmwinkel (b) als Funktion der relativen Dicke

der Verlustantwort ist hingegen der mit einer moderaten Umlenkungsverteilung und einer sich sanft ändernden Dickenverteilung, d. h. Entwurf  $\mathcal{S}$ .

Eine Diskussion der selektierten Entwürfe bezüglich der Profilverluste  $\omega$  und der Abströmung  $\alpha_E$  als Funktion der relativen Dicke  $tc$  bestätigt eindeutig deren Lage im Kriterienraum und die Widersprüchlichkeit der definierten Kriterien, Abbildung 7. Der Entwurf  $\mathcal{M}$  beziehungsweise  $\mathcal{S}$  dominiert Entwurf  $\mathcal{Z}$  bezüglich des mittleren Verlustes beziehungsweise dessen Streuung, sie sind aber gleichzeitig durch hohe Ausfallwahrscheinlichkeiten gekennzeichnet. Eine geringe Streuung ist nur durch ein erhöhtes Verlustniveau möglich. Die Frage nach der einen, zu realisierenden Konfiguration bleibt je nach Anforderung dem Entwurfsingenieur überlassen. Ein Entwurf aus der Menge der *Pareto-optimalen* Kompromisse, der die Vorteile beispielsweise von Punkt  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{Z}$  verbindet, könnte hier als vielversprechender Kandidat in Betracht gezogen werden.

## 7 Sensitivitätsanalyse

Um das Wissen über den unsicheren Entwurfsraum  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{10}$  zu erweitern, wird eine Sensitivitätsstudie in *optiSLang* für einen ausgewählten deterministischen Entwurf  $\mathbf{p}$  durchgeführt. Über die Abschätzung der Variationspotenziale und Diskussion der Korrelationsstrukturen soll damit eine Reduktion des Parameterraumes in seiner Dimension und seinen Grenzen ermöglicht werden.

Für die vorliegende Untersuchung wird wiederum eine Mittensektion einer Rotorreihe verwendet. Die Analyse stützt sich auf eine Versuchsplanung mit 500 *Latin Hypercube* Punkten. Abbildung 8 zeigt die linearen und reduzierten quadratischen Korrelationskoeffizienten  $\rho_l$  und  $\rho_q$ . Bis auf wenige Kombinationen zeigen sich keine linearen oder quadratischen Korrelationen. Am stärksten korreliert die Wölbungsrücklage  $x_{d,f}$  mit dem Abströmwinkel  $\alpha_{E,S1}^{DP}$  ( $\rho_l = -0,75$ ). Weiterhin nehmen mit steigendem Gesamtverlust  $\omega^{DP}$  erwartungsgemäß auch die Stoßverluste  $\omega_i^{DP}$  zu ( $\rho_l = 0,76$ ). Der Erfahrung widersprechend existiert eine, wenngleich schwache, positive Korrelation zwischen Profilsehnenlänge  $c_d$  und Abströmwinkel  $\alpha_{E,S1}^{DP}$  ( $\rho_l = 0,43$ ). Empirisch beurteilt müsste eine längere Schaufel eigentlich einen kleineren Abströmwinkel, d. h. eine höhere Strömungs-

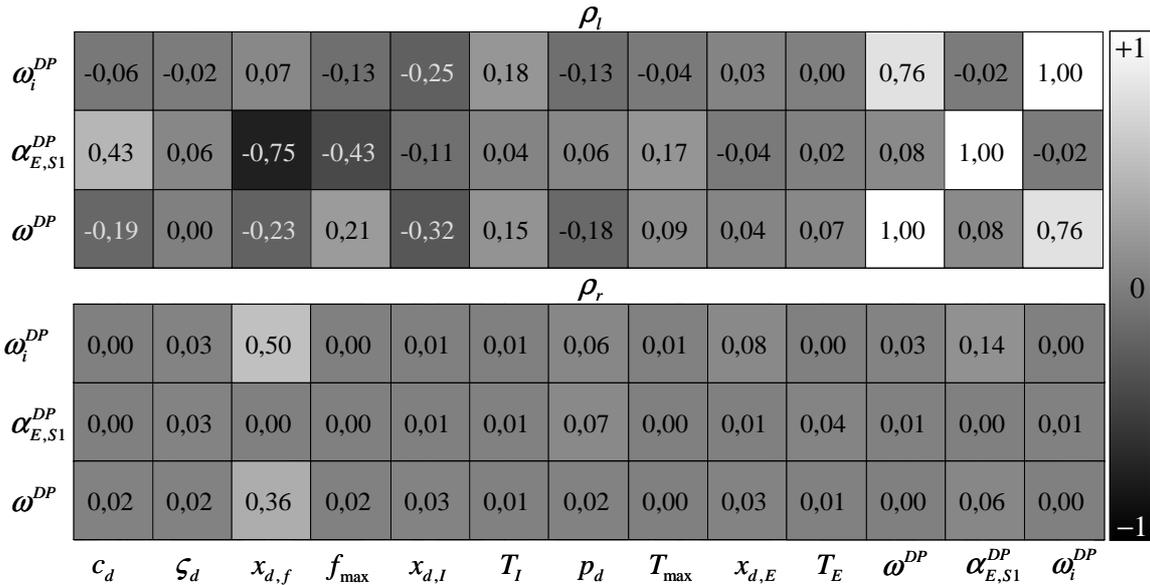


Abbildung 8: Lineare und quadratische Korrelationskoeffizienten für Stoßverluste, Umlenkwinkel und Verlustkoeffizient

umlenkung, erzielen. Ein weiterer schwacher linearer Zusammenhang zeigt sich zwischen maximaler Wölbung  $f_{max}$  und Abströmung  $\alpha_{E,S1}^{DP}$ . Eine quadratische Korrelation existiert zwischen Wölbungsrücklage  $x_{d,f}$  und aerodynamischem Gesamtverlust  $\omega^{DP}$  sowie aufgrund der gezeigten Korrelation zwischen  $\omega^{DP}$  und  $\omega_i^{DP}$  auch auf den Druckverlust.

Eine lineare und quadratische Regressionsanalyse führt lediglich für den Abströmwinkel  $\alpha_{E,S1}^{DP}$  auf ein zuverlässiges Modell mit einem Bestimmtheitsmaß von  $R_{adj}^2 = 97\%$  für eine lineare und  $R_{adj}^2 = \sum \Delta R_{adj}^2 = 97\%$  für eine quadratische Approximation. Ein lineares Modell wäre demnach völlig ausreichend. Im Gegensatz dazu betragen die Bestimmtheitsmaße für den Gesamtverlust bzw. Stoßverlust  $R_{adj}^2 = 29\%$  bzw.  $R_{adj}^2 = 12\%$  für ein lineares Modell und  $R_{adj}^2 = 59\%$  bzw.  $R_{adj}^2 = 48\%$  für ein quadratisches Modell. Basierend auf den Approximationen zeigt Abbildung 9 den Einfluss der einzelnen Parameter auf die Verluste und der Abströmung.

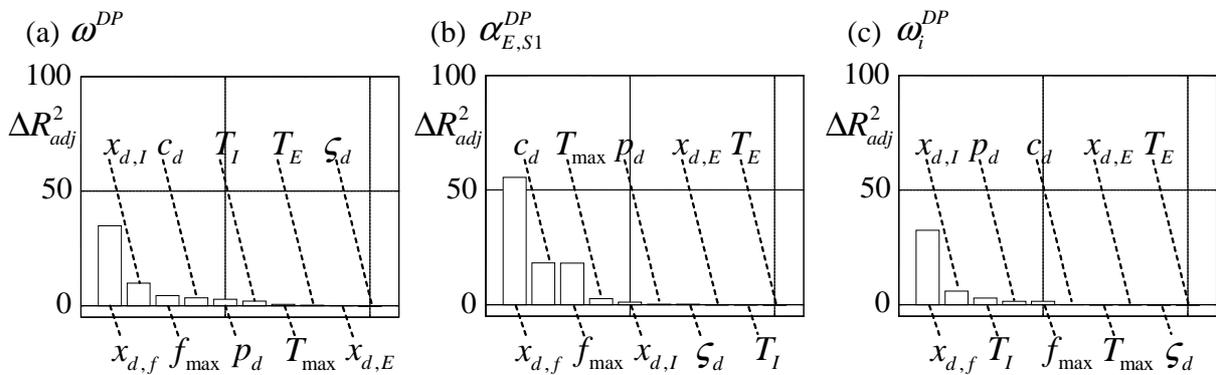


Abbildung 9: Sensitivitäten der einzelnen Parameter basierend auf einer quadratischen Regression für Verlust  $\omega^{DP}$  (a), Abströmung  $\alpha_{E,S1}^{DP}$  (b) und Stoßverluste  $\omega_i^{DP}$  (c)

Unter Annahme einer quadratischen Regression und Allgemeingültigkeit der Ergebnisse für andere Schaufelprofile wäre eine Reduktion des unsicheren Entwurfsvektors  $\mathbf{d}$  um den Staffellungswinkel  $\zeta_d$ , der Hinterkantendicke  $T_E$  und deren Position  $x_{d,E}$  möglich. Weiterhin wäre zu prüfen, ob eine alleinige Berücksichtigung der vielleicht wichtigsten zwei oder drei Größen auf hinreichend genaue Ergebnisse bei einer probabilistischen Bewertung führen würde.

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des VIT 2 Projektes (Virtuelles Triebwerk) in Zusammenarbeit mit Rolls-Royce Deutschland und wurde zum Teil vom Land Brandenburg finanziert. Rolls-Royce Deutschland sei für die Genehmigung zur Veröffentlichung dieser Arbeit gedankt. Besonderer Dank gebührt weiterhin Dynardo für die kostenfreie Überlassung einer Lizenz zur Durchführung der dargestellten Untersuchungen.

## Literatur

- ABBOTT, I. H. ; DOENHOFF, A. E.: *Theory of Airfoil Sections*. Dover, New York, 1949
- BÜCHE, D. ; GUIDATI, G. ; STOLL, P.: Automated Design Optimization of Compressor Blades for Stationary, Large-Scale Turbomachinery. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2003, GT2003-38421* (2003)
- DEB, K.: *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Chichester, UK : John Wiley & Sons, 2001. – ISBN 0-471-87339-X
- DEB, K. ; AGRAWAL, S. ; PRATAP, A. ; MEZARIVAN, T.: *A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II*. Parallel Problem Solving from Nature – PPSN VI. Springer-Verlag, Berlin, 2000
- DUTTA, A. K. ; FLASSIG, P. M. ; BESTLE, D.: A Non-Dimensional Quasi-3D Blade Design Approach with Respect to Aerodynamic Criteria. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo, GT2008-50687* (2008)
- DYNARDO: *optiSLang the optimizing Structural Language for Sensitivity Analysis, Multi-disciplinary Optimization, Robustness Evaluation and Reliability Analysis Version 3.0 Alpha*, 2008
- GENGENIOUS SOFTWARE INC.: *iSIGHT-FD Version 3.0 User's Guide*, 2008
- ESTECO GMBH: *modeFRONTIER*, 1999. – URL <http://www.esteco.com>
- FLASSIG, P. M.: Multi-Objective Compressor Blade Optimisation Using a Non-Dimensional Parameterisation Approach. In: *Proceedings of CEAS European Air and Space Conference, CEAS-2007-220* (2007)
- FLASSIG, P. M. ; DUTTA, A. K. ; BESTLE, D.: Robuste Auslegung von Verdichterschau-feln. In: *Proceedings of DLRK 2008, DLRK2008-081174* (2008)
- FLASSIG, P. M. ; DUTTA, A. K. ; BESTLE, D.: Robustheit und Zuverlässigkeit in der areodynamischen Verdichterauslegung. In: *Proceedings of DPW 2008* (2008)

- HINZ, M.: *Prozessintegration und Optimierung in der Triebwerkstechnik – Ein Algorithmenvergleich*. Diploma thesis, BTU Cottbus, 2007
- KESKIN, A.: *Process Integration and Automated Multi-Objective Optimization Supporting Aerodynamic Compressor Design*. Ph.D. thesis, Shaker, Aachen, 2007. – ISBN 3832258752
- KÖLLER, U. ; MÖNIG, R. ; KÜSTERS, B. ; SCHREIBER, H.-A.: Development of Advanced Compressor Airfoils for Heavy-Duty Gas Turbines - Part I: Design and Optimization. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo, GT2000-122* Vol. 122 (2000), S. 397–405
- LANGE, A. ; VOGELER, K. ; SCHRAPP, H. ; CLEMEN, C.: Ein parametrisches Modell für Verdichterschaufeln zur Abbildung von geometrischen Abweichungen in der numerischen Simulation. In: *Proceedings of DPW 2008* (2008)
- MAGRAB, E. B. ; AZARM, S. ; BALACHANDRAN, B. ; DUNCAN, J. ; HEROLD, K. ; WALSH, G.: *An Engineer's Guide to MATLAB*. 2<sup>nd</sup>. Prentice Hall, 2004
- MATH & COMPUTER SCIENCE DIVISION OF ARGONNE NATIONAL LABORATORY: *OpenPBS Public Home*, 2004. – URL <http://www-unix.mcs.anl.gov/openpbs/>
- PIEGL, L. ; TILLER, W.: *The NURBS Book*. 2<sup>nd</sup>. Springer, Berlin, 1997
- STEFFENS, K. ; SCHÄFFLER, A.: Triebwerksverdichter – Schlüsseltechnologie für den Erfolg bei Luftfahrtantrieben. In: *Proceedings of DGLR Jahrestagung, DGLR-JT2000-101* (2000)
- THE MATHWORKS: *Matlab & Simulink – Release Notes for R2007a*, 2007
- TIWARI, S. ; KOCH, P. ; FADEL, G. ; DEB, K.: Archive-based Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization. In: *Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference* (2008)
- WU, C.-H.: A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial-, and Mixed-Flow Types / Lewis Flight Propulsion Laboratory. Washington, 1952 (2604). – NACA TN
- YOUNGREN, H.: Analysis and Design of Transonic Cascades with Splitter Vanes / Cambridge: MIT. 1991 (203). – GTL Report
- ZITZLER, E. ; LAUMANN, M. ; THIELE, L.: SPEA2: Improving the Performance of the Strength Pareto Evolutionary Algorithm / Computer Engineering and Communication Networks, ETH Zürich. 2001 (103). – Forschungsbericht